

## 回路関数の分母, 分子素子導関数の計算法と感度解析

正員 本間 仁志<sup>†</sup> 正員 伊藤 宏一<sup>†</sup> 正員 佐川 雅彦<sup>†</sup>

## A Computing Method for Obtaining Derivatives of Denominator and Numerator of Network Functions with Respect to Elements and Sensitivity Analysis

Hitoshi HONMA<sup>†</sup>, Kouichi ITOH<sup>†</sup> and Masahiko SAGAWA<sup>†</sup>, Members

あらまし 回路関数の分母, 分子の素子による導関数を用いることによって, 素子値の変化に伴う回路網の特性変動の予測や評価, 回路の最適化等に必要な種々の感度は, 容易に計算される. しかし, 報告されている導関数の計算法は, 導関数を求める素子の数  $m$  が  $m > n$  (但し, 回路を表現する行列のサイズを  $n \times n$  とする) の場合, つまり, 多くの素子について計算を行なう必要がある感度解析には適さない. 本論文では, J. Vlachらの方法の冗長度を改善したものを基本とすることによって, デジタル回路, アナログ回路, スイッチトキャパシタ回路の分母, 分子の高次までの導関数を計算する方法を示す. 本文では, 提案する方法と従来の方法を, 必要な記憶容量と乗算回数について比較し, 多くの素子について感度解析を行なう場合ほど, 本方法が有効となることを確認している. 最後に, 本理論に従って実際にプログラミングを行ない, 素子感度を計算した幾つかの例を示している.

## 1. ま え が き

回路網の感度は, パラメータの変化に伴う回路網の特性変動の予測や評価, 回路の最適化等と多方面に用いられている. この感度の計算手法としては, 随伴回路を用いて出力の微分感度を求める方法が広く知られている. この方法は, 線形集中時不変のアナログ回路<sup>(1)</sup>に限らず, スイッチトキャパシタ回路 (以下, SC回路と略記する)<sup>(2)</sup>, デジタル回路<sup>(3)</sup>等の感度解析が可能である. これらの方法に対し, 本論文では, 回路関数の分母, 分子の導関数を求め, それらを用いて感度解析を行なう方法を報告する. 分母, 分子の導関数は, 随伴回路を用いて計算できる(1)出力の微分感度はもちろん, (2)パラメータが大きく変化した場合の感度や, (3)極, 零点感度の解析<sup>(4)</sup>, (4)演算増幅器の非理想特性の評価及び保証<sup>(5), (6)</sup>等に広く適用することができる.

分母, 分子の導関数の計算は, 素子および周波数を変数として回路関数を導出できる記号解析の手法を用いても可能である. しかし, アナログ回路, デジタル回路, SC回路の全てに適用可能なパラメータ抽出操作法<sup>(7), (8)</sup>や複素内挿法<sup>(9)~(11)</sup>は, 感度解析を行なう素子の数  $m$  と回路を表現する行列のサイズ  $n \times n$  に比

例して計算量が増大してしまい<sup>(3)</sup>, 多くの素子について計算を行なう必要がある感度解析には適さない. それらに比べ効率的なJ. Vlachらの方法<sup>(2)</sup>, アルゴリズムの中に冗長度を含んでいるために, やはり,  $n$  と  $m$  に依存した記憶容量と計算が必要になってしまっている. また, この方法は, 扱う回路関数が任意の素子に関して双一次関数となる条件が必要であり, SC回路での適用は報告されていない.

本論文では, 計算量が  $n$  にのみ依存し  $m$  には無関係な分母, 分子の素子導関数の計算法を与え, それらを用いて回路関数の感度解析を行なう. 本文では, まず, J. Vlachらの方法<sup>(2)</sup>の冗長度を改善した本方法の基本的な考え方を, デジタル回路の場合を例にして説明する. 次に, 本理論を, アナログ回路にも適用できる様に拡張し, 必要な記憶容量と乗算回数を従来の方法と比較する. 冗長度の改善によって, この理論の拡張は, 容易であり, また, 感度解析の実行も, 組織的かつ効率的に行なうことが可能となる. 更に, 本理論は, SC回路でも適用可能となる.

本理論を実行するために必要な記憶容量は, ほぼ回路を表わす行列のサイズ  $n \times n$  であり, 節点解析等による回路の周波数特性の解析と同程度である. アルゴリズムの実行において基本となる計算は, 行列式と逆行列の計算のみであり, 感度を求める素子数に無関係に  $n^3$  の乗算回数でその処理を終わる. 実際にプログラミン

<sup>†</sup> 東京都立大学工学部電気工学科, 東京都  
Faculty of Technology, Tokyo Metropolitan University, Tokyo,  
158 Japan

グを行ない、アナログ回路とSC回路について、回路関数の微分素子感度と素子値が大きく変化した場合の感度を計算し、本理論の有効性を確認している。

## 2 デジタル回路の感度解析

乗算器、加算器、遅延器によって構成される線形デジタル回路の乗算係数に関する感度の解析方法について検討する。また、ここでの議論は、3.以後の重要な準備となる。

デジタル回路の行列表現の方法として、すでに報告されている R. E. Crochiere らの方法を用いる<sup>10</sup>。図1の2次デジタルフィルタを、この方法で表わすと(1)式となる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & c & d \\ -1 & 1 & -a & -b \\ -z^{-1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -z^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AE \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

ここで、 $X_i$ は、各節点における信号である。行  $i$  は、節点  $i$  に入ってくる信号に、列  $j$  は、節点  $j$  を出ている信号に対応している。また、右辺の  $i$  番目の値は、節点に接続されている独立電源の値である。任意の  $X_i$  の値は、(1)式にクラームルの公式を適用することによって求めることができる。従って、任意の節点間の関係を余因子の比として求めることができる。ここで、個々の乗算係数はそれぞれ行列の1箇所しか表われないことに注目してもらいたい。このことは、図1の回路に限らず一般的に言うことができる。

今、任意の節点間の関係を表わす回路関数を  $H$  とすると、 $H$  は、任意の乗算係数  $e_k$  の双一次関数となる。

$$H = \frac{N}{D} = \frac{N_0 + e_k N_1}{D_0 + e_k D_1} \quad (2)$$

$e_k$  が  $e_k + \Delta e_k$  変化したとすると、 $H$  は、(3)式に示すように  $H'$  となる。

$$H' = \frac{N + \Delta e_k \cdot N_1}{D + \Delta e_k \cdot D_1} \quad (3)$$

$\Delta H = H - H'$  を用いることによって、 $e_k$  の変動に対する感度を次式で定義する。

$$S_{\Delta e_k}^H \triangleq \frac{e_k}{H} \cdot \frac{\Delta H}{\Delta e_k} = \frac{(N_1 D - N D_1) e_k}{N(D + \Delta e_k \cdot D_1)} \quad (4)$$

ここで、 $\Delta e_k$  を0に近づけると、(4)式は、微分感度に一致する。

$$S_{e_k}^H \triangleq \frac{e_k}{H} \cdot \frac{\partial H}{\partial e_k} = \frac{(N_1 D - N D_1) e_k}{D \cdot H} = \lim_{\Delta e_k \rightarrow 0} S_{\Delta e_k}^H \quad (5)$$

(4)、(5)式を計算するためには、分母、分子の導関数  $D_1$

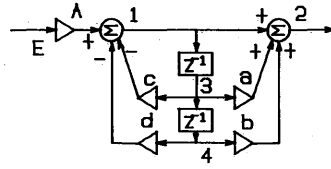


図1 2次デジタルフィルタ  
Fig.1 2nd order digital filter.

$= \partial D / \partial e_k, N_1 = \partial N / \partial e_k$  を求める必要がある。同様に、一次感度に限らず、複数個の素子に変化した際の回路特性の偏差や高次感度も、分母、分子の導関数より計算できる。以下では、複数個の素子の変化の影響の計算や、素子の非理想特性が回路特性におよぼす影響を最小にする最適設計、SC回路の感度解析の準備も考慮して、分母、分子の  $L$  次導関数を考える。

回路関数の分母、分子を、一般的に、 $n \times n$  の行列  $T$  の行列式  $X(e)$  で表わし、乗算係数  $e_1, e_2, \dots, e_m$  の関数であるとする。

$$X(e) = \det T \quad (6)$$

$X(e)$  は、(2)式で示したように、任意の  $e_k (k=0, 1, \dots, m)$  に関して一次となる。そして、(1)式の例から分かるように、 $e_k$  は、 $T$  の中で高々一箇所しか存在しない。ここでは、この  $e_k$  が、 $T$  の  $i_k$  行、 $j_k$  列に存在するものとする。

次に、 $m$  個の  $e_k$  から任意の  $L$  個  $e_1, e_2, \dots, e_L$  を選び出し、これらの乗算係数による  $X(e)$  の  $L$  次導関数を求める。ここでは、この  $L$  個の  $e_k$  は、各々異なった行、異なった列に存在することを仮定する。但し、この仮定は、最終結果では取り除かれる。 $X(e)$  の  $L$  次導関数は、行列  $T$  の間に次の関係式が成立する。

$$\frac{\partial^L X(e)}{\partial e_1 \partial e_2 \dots \partial e_L} = \det T_L \cdot \prod_{k=1}^L d_k \quad (7)$$

但し、

$$d_k = 1 \text{ or } -1 \quad (8)$$

$$T_L = T \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_L \\ j_1 & j_2 & \dots & j_L \end{pmatrix} \quad (9)$$

上式の  $T_L$  は、 $T$  の  $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_L, j_L)$  要素を1と置いて、 $i_1$  行、 $i_2$  行、 $\dots$ 、 $i_L$  行、 $j_1$  列、 $j_2$  列、 $\dots$ 、 $j_L$  列のそれ以外の要素を0と置いた  $n \times n$  の行列である。また、 $d_k$  は、 $T$  の中で  $e_k$  の符号を意味している。(7)式を直接計算しても導関数を求めることは可能である。しかし、多くの素子について導関数を計算する場合、この方法では、その都度手順を繰り返してしまい、計算量が増大してしまう。この問題

を解決するために, 本論文では, J. Vlachらの方法<sup>12)</sup>を改善した方法を提案する。

$n \times n$ の行列  $T$  において,  $i_1, i_2, \dots, i_L$  行以外の行を,  $i'_1, i'_2, \dots, i'_{n-L}$  とする。但し,  $1 \leq i'_1 < i'_2 < \dots < i'_{n-L} \leq n$  とする。同様に, 列に対しても  $j_1, j_2, \dots, j_L$  以外の列を選び,  $1 \leq j'_1 < j'_2 < \dots < j'_{n-L} \leq n$  とする。次に,  $i_1, i_2, \dots, i_L$  及び  $j_1, j_2, \dots, j_L$  を数の小さい順番に並べ, 各々,  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_L \leq n, 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_L \leq n$  とする。すると, (7)式の  $\det T_L$  は, ラプラスの展開公式より, 次式で与えられる。

$$\det T_L = (-1)^{\sum_{p=1}^L i'_p + j'_p} \cdot \det T_L \begin{bmatrix} I_1 & I_2 & \dots & I_L \\ J_1 & J_2 & \dots & J_L \end{bmatrix} \cdot \det T_L \begin{bmatrix} i'_1 & i'_2 & \dots & i'_{n-L} \\ j'_1 & j'_2 & \dots & j'_{n-L} \end{bmatrix} \quad (10)$$

但し, (10)式で用いた行列  $A$  の  $A [ ]$  表現は, (11)式で定義される小行列式を意味する。ここで,  $a(i, j)$  は,  $A$  の  $i$  行,  $j$  列要素である。

$$\det A \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_N \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_N \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a(\alpha_1, \beta_1) & \dots & a(\alpha_1, \beta_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a(\alpha_N, \beta_1) & \dots & a(\alpha_N, \beta_N) \end{vmatrix} \quad (11)$$

(10)式の1番目の  $\det T_L [ ]$  の要素は, 0もしくは1であり, その行列式の値は1か-1となる。2番目の  $\det T_L [ ]$  に対しては, 次式が成立する。

$$\det T_L \begin{bmatrix} i'_1 & \dots & i'_{n-L} \\ j'_1 & \dots & j'_{n-L} \end{bmatrix} = \det T \begin{bmatrix} i'_1 & \dots & i'_{n-L} \\ j'_1 & \dots & j'_{n-L} \end{bmatrix} \quad (12)$$

小行列式の性質<sup>13)</sup>と(12)より,

$$\det T_L = (-1)^{\sum_{p=1}^{n-L} i'_p + j'_p} \cdot \det T \cdot \det Q \begin{bmatrix} J_1 & J_2 & \dots & J_L \\ I_1 & I_2 & \dots & I_L \end{bmatrix} \quad (13)$$

但し,

$$Q \triangleq T^{-1} \quad (14)$$

となる。(13)式を(10)式に代入すると,

$$\det T_L = \det T \cdot \det T_L \begin{bmatrix} I_1 & \dots & I_L \\ J_1 & \dots & J_L \end{bmatrix} \cdot \det Q \begin{bmatrix} J_1 & \dots & J_L \\ I_1 & \dots & I_L \end{bmatrix} \quad (15)$$

となる。(15)式は, J. Vlachらによって, すでに報告されている<sup>12)</sup>。本論文では, 更に, 簡単化を行なう。まず, (15)式の行列式  $\det Q [ ]$  の行と列に置換を施すと,

$$\det Q \begin{bmatrix} J_1 & \dots & J_L \\ I_1 & \dots & I_L \end{bmatrix} = (-1)^{n_1} \cdot \det Q \begin{bmatrix} j_1 & \dots & j_L \\ i_1 & \dots & i_L \end{bmatrix} \quad (16)$$

となる。ここで,  $n_1$  は, 置換を行なう時の互換の回数である。 $\det T_L [ ]$  についても, 置換を施すと(17式)となる。

$$\det T_L \begin{bmatrix} I_1 & \dots & I_L \\ J_1 & \dots & J_L \end{bmatrix} = (-1)^{n_1} \cdot \det T_L \begin{bmatrix} i_1 & \dots & i_L \\ j_1 & \dots & j_L \end{bmatrix} = (-1)^{n_1} \quad (17)$$

(16), (17)式を(15)式に代入すると,

$$\det T_L = \det T \cdot \det Q \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_L \\ i_1 & i_2 & \dots & i_L \end{bmatrix} \quad (18)$$

となる。従って,  $X(e)$  の  $L$  次導関数は, (7)式より, (19)式となる。

$$\frac{\partial^L X(e)}{\partial e_1 \partial e_2 \dots \partial e_L} = \det T \cdot \begin{vmatrix} q(j_1, i_1) \dots q(j_1, i_L) \\ \vdots \\ q(j_L, i_1) \dots q(j_L, i_L) \end{vmatrix} \cdot \prod_{k=1}^L d_k \quad (19)$$

ここで,  $q(j, i)$  は,  $Q$  の  $j$  行,  $i$  列要素である。特に重要な1次導関数について書き直したのが(20)式である。

$$\frac{\partial X(e)}{\partial e_k} = d_k \cdot \det T \cdot q(j_k, i_k) \quad (20)$$

(19)式は,  $L$  個の  $e_k$  が  $T$  の中で異なった行, 異なった列に存在することを仮定して導かれた。もし  $L$  個の  $e_k$  の中に,  $T$  の同じ行もしくは同じ列に存在する素子がある場合,  $\det T$  においてそれらの素子の積は存在せず, 導関数は明らかに零となる。(19)式を用いても, その結果は, やはり零であり, 最初の仮定は取り除かれる。(19)式の実行に必要な  $\det T$  と  $Q$  の計算は, 全ての  $e_k (k=1, 2, \dots, m)$  に関して共通の処理である。 $\det T$  と  $Q$  を求めた後に必要になる処理は,  $Q$  からその要素を選び出し,  $\det T$  にかけて合わせるだけである。(20)式を用いることによって, (4), (5)式は, 計算可能になる。

(16), (17)式が成立することによって, (19), (20)式の計算は, (10), (13)式を導出する際に行なった行と列の並び換えの影響を考えないで実行できる。この様な特徴によって, 本理論は, 更に, 素子が行列の1箇所だけに存在することを仮定できないアナログ回路, SC回路の場合についても容易に拡張可能になる。これに対し, J. Vlachらの方法<sup>12)</sup>は, 再び行と列を入れ換えることによって, 並び換えと符号の問題を解決している。その結果, その適用範囲が限定され, 更に, 感度を解析する素子の数に比例した記憶容量と余分な処理が必要になってしまう。

### 3. アナログ回路の感度解析

線形集中時不変のアナログ回路の素子変動に伴う感

度の計算方法を検討する。改良節点法 (Modified Nodal Approach) <sup>10)</sup> や節点解析法によって導出される回路関数の分母、分子に、本理論を適用する。

ここでは、2端子素子、理想演算増幅器、定数利得を持つ各種の従属電源によって構成される回路を考える。導出される回路関数は、任意の素子  $e_k$  ( $k=0, 1, 2, \dots, m$ ) に関してデジタル回路の場合と同様に双一次関数となる。デジタル回路の表現では、乗算値は行列の中の1箇所にかき表われず、そのことを仮定して2.での結果は導かれた。しかし、ここでは、その仮定は成立しない。以下では、2.での理論を、改良節点法や節点解析法の場合でも適用できるように拡張する。

改良節点法や節点解析法によって導出される分母、分子の行列式  $X(e) = \det T$  に、任意の素子  $e_k$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ) は、たかだか4箇所表われる。その場合、 $e_k$  は、(2)式に示すように対称な位置に存在し、行もしくは列が揃っている  $e_k$  に対して異符号となることが知られている。

$$T = \begin{bmatrix} & j_{k1} & j_{k2} & & & \\ & \vdots & \vdots & & & \\ \cdots & e_k & -e_k & \cdots & & \\ & \vdots & \vdots & & & \\ \cdots & -e_k & e_k & \cdots & & \\ & \vdots & \vdots & & & \end{bmatrix} \begin{matrix} i_{k1} \\ i_{k2} \end{matrix} \quad (21)$$

従って、 $X(e)$  の  $L$  次導関数は、(7)式に対して、次式で表わすことができる。

$$\frac{\partial^L X(e)}{\partial e_1 \partial e_2 \cdots \partial e_L} = \sum_{f_1=1}^2 \sum_{l_1=1}^2 \cdots \sum_{f_L=1}^2 \sum_{l_L=1}^2 (-1)^{\sum_{b=1}^L f_b l_b} \cdot \det T \begin{bmatrix} i_{1f_1} & \cdots & i_{Ll_L} \\ j_{1l_1} & \cdots & j_{Ll_L} \end{bmatrix} \quad (22)$$

(22)式の右辺の各項には、(18)式が適用でき、

$$\frac{\partial^L X(e)}{\partial e_1 \partial e_2 \cdots \partial e_L} = \sum_{f_1=1}^2 \sum_{l_1=1}^2 (-1)^{\sum_{b=1}^L f_b l_b} \cdot \det T \cdot \det Q \begin{bmatrix} j_{1l_1} & \cdots & j_{Ll_L} \\ i_{1f_1} & \cdots & i_{Ll_L} \end{bmatrix} \quad (23)$$

となる。この  $4^L$  個の行列式は、1つの行(列)の値だけが異なる2つの行列式の和は、1つの行列式にまとめられるという性質を繰り返し用いることによって、

$$\frac{\partial^L X(e)}{\partial e_1 \partial e_2 \cdots \partial e_L} = \det T \cdot \begin{vmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1L} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{L1} & \cdots & q_{LL} \end{vmatrix} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \text{但し、} \quad q_{rp} &= q(j_{r1}, i_{p1}) - q(j_{r2}, i_{p1}) \\ &\quad - q(j_{r1}, i_{p2}) + q(j_{r2}, i_{p2}) \end{aligned} \quad (25)$$

$$r, p = 1, 2, \dots, L$$

と1つの行列式に整理される。

ここまでは、全ての  $e_k$  が、(2)式のように4箇所に存在するとして議論を進めた。しかし、 $e_k$  は、 $T$  の4箇所に存在するとは限らず、その他に、行あるいは列が揃って異符号で2箇所、もしくは1箇所に存在する可能性がある。この場合にも、 $n \times n$  の行列  $T$  に1行1列を付け加えた  $T'$  を考えることによって、見掛け上、4箇所に存在させることが可能となる。

$$T' = \begin{bmatrix} & & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & & n & & n+1 \\ & & & & & e_i & & & & & -e_i \\ & & & e_k & & & & & & & -e_k \\ & & & & & & & & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e_j & \cdots & -e_j & & -e_i & & & & & & e_i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & & & \\ -e_j & -e_k & & e_j & & & & & & & e_k \end{bmatrix} \quad (26)$$

このような表現を用いることによって、一般的な  $L$  次導関数の表現も、(24)式とほぼ同様な結果を導くことが可能となる。(24)式と異なる点は、 $q(j, i)$  の値が、 $j, i \leq n$  の範囲では、やはり、 $T$  の逆行列  $Q$  の  $j$  行、 $i$  列要素であるのに対して、 $j=n+1$  もしくは  $i=n+1$  の場合、

$$q(j, i) = 0, \text{ for } j=n+1 \text{ or } i=n+1 \quad (27)$$

とする必要がある点だけである(この結論の証明は、文献(13)参照)。特に重要な1次導関数について書き直したのが(28)式である。

$$\begin{aligned} \frac{\partial X(e)}{\partial e_k} &= \det T \cdot \{q(j_{k1}, i_{k1}) - q(j_{k2}, i_{k1}) \\ &\quad - q(j_{k1}, i_{k2}) + q(j_{k2}, i_{k2})\} \end{aligned} \quad (28)$$

本方法の基本となる計算は、逆行列と行列式であり、その処理には、多くの場合サブルーチンとして用意されているガウスの消去法やLU分解法等を用いることができる。これらの方法を用いた場合、感度を求める素子数に無関係に  $n^3$  の乗算回数でその処理が終わる。また、必要な記憶容量は、ほぼ  $n \times n$  か  $(n+1) \times (n+1)$  程度である。これに対し、J. Vlachらの方法<sup>10)</sup> は、感度を求める素子数を  $m$  とすると、約  $n \times n + m \times m$  の記憶容量が必要になる。 $m$  が小さな値の場合には、パラメータ抽出操作法<sup>(7),(8)</sup>等の報告されている記号解析で十分であり、本方法は、 $m$  が大きい場合の処理を目的としている。具体的な  $m$  と  $n$  の値は、図3の無極の7次ローパスフィルタの例では、 $n=5$  であり、全ての素子について感度を求めるとすると  $m$  は9となる。有極のフィルタでは、 $m$  は  $n$  に比べ益々大きくなり、代表的な有極の6次バンドパスフィルタでは、 $n=4$  であるのに対して  $m=10$  となる。節点解析や改良節点

法によって回路解析を行なった場合, 一般に,  $m > n$  であり,  $m$  が  $n$  の 2 倍以上になることも珍しくなく, J. Vlach らの方法では, 多くの記憶容量が必要になってしまふ. 分母, 分子の導関数を内挿法<sup>(9)</sup>を用いて複素周波数の多項式としてもとめる場合, 更に, 複素周波数の次数倍の記憶容量が必要になり, 必要な記憶容量が回路の解析可能規模を決めてしまふ.

表 1 は,  $X(e)$  の導関数を計算する際に必要な乗算回数を, パラメータ抽出操作法<sup>(7),(8)</sup>, J. Vlach らの方法<sup>(10)</sup>及び本方法の場合についてまとめたものである. 図 2 は,  $n=20$  の場合について,  $X(e)$  の 1 次及び 2 次導関数を計算するに必要な乗算回数を比較したものである. 本方法は, アルゴリズムが単純であるという特徴の他に, この様に,  $n < m$  であるほど記憶容量はもちろん乗算回数の点でも有利であり, 多くの素子について感度を計算するのに適する. 本方法は, SC 回路の感度解析にも適用可能であり, その場合, 本方法は, 更に, 他の方法に比べ有効になる.

#### 4 SC 回路の感度解析

キャパシタ, 理想スイッチ, 理想演算増幅器, 定数利得従属電源で構成され, 2 相クロックで動作する SC 回路の素子値変動に伴う感度の計算方法を検討する. 節点解析法<sup>(11)</sup>, 改良節点法<sup>(12)</sup>によって導出される回路関数の分母, 分子に, 本理論を適用する.

SC 回路の回路関数  $F$  は, 任意の素子  $e_k$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ) に関して双一次関数とはならず, 次式となることが知られている.

$$F = \frac{N}{D} = \frac{N_0 + e_k N_1 + e_k^2 N_2}{D_0 + e_k D_1 + e_k^2 D_2} \quad (29)$$

従って,  $e_k$  が  $e_k + \Delta e_k$  に変化したとすると,  $F$  は, (31)式に示すように  $F'$  となる.

$$F' = \frac{N + \Delta e_k (N_1 + 2N_2) + \Delta e_k^2 D_2}{D + \Delta e_k (D_1 + 2D_2) + \Delta e_k^2 D_2} = \frac{N + \Delta e_k (\partial N / \partial e_k) + \frac{1}{2} \Delta e_k^2 (\partial^2 N / \partial e_k^2)}{D + \Delta e_k (\partial D / \partial e_k) + \frac{1}{2} \Delta e_k^2 (\partial^2 D / \partial e_k^2)} \quad (30)$$

$\Delta F = F' - F$  を用いることによって, 感度を次式で定義する.

$$S_{e_k}^F = \frac{e_k}{F} \cdot \frac{\Delta F}{\Delta e_k} \quad (31)$$

ここで,  $\Delta e_k$  を 0 に近づけることによって, 微分感度に一致する.

表 1 乗算回路の比較

	L 次の導関数	一次から L 次までの導関数
本方法	$n^3 + {}_m C_L \{L!(L-1)+1\}$	$n^3 + \sum_{h=1}^L {}_m C_h \cdot \{h!(h-1)+1\}$
パラメータ抽出法	${}_m C_L \cdot \frac{(n-L)^3}{3}$	$\sum_{h=1}^L {}_m C_h \cdot \frac{(n-h)^3}{3}$
J. Vlach らの方法	$n^3 / 3 + m \cdot n^2 + {}_m C_L \{L!(L-1)+1\}$	$n^3 / 3 + m \cdot n^2 + \sum_{h=1}^L {}_m C_h \cdot \{h!(h-1)+1\}$

$m$ : 感度を求める素子の数  $n$ : 行列  $T$  のサイズ  
 ${}_m C_h$ :  $m$  個から  $h$  個を選ぶ組み合わせ

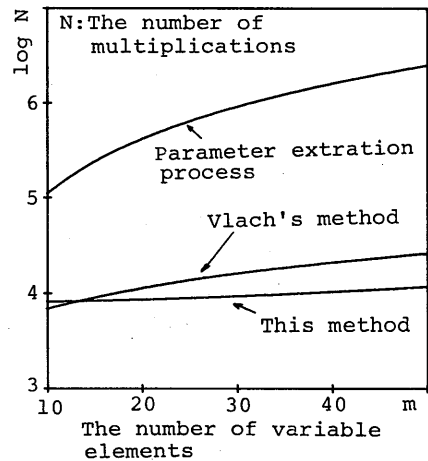


図 2  $n=20$  の場合の乗算回数の比較  
 Fig.2 The number of multiplications for  $n=20$ .

$$S_{e_k}^F = \frac{e_k}{F} \cdot \frac{\partial F}{\partial e_k} = \frac{N(\partial D / \partial e_k) - D(\partial N / \partial e_k)}{N \cdot D} = \lim_{\Delta e_k \rightarrow 0} S_{\Delta e_k}^F \quad (32)$$

2 相クロックで動作する SC 回路は, 等価 4 ポート回路として表現でき, 節点解析法<sup>(11)</sup>, 改良節点法<sup>(12)</sup>による解析が可能である. これらの方法で導出される回路関数の分母, 分子の行列式  $X(e) = \det T$  に, キャパシタ  $C$  は, 次式のようにたかだか 16 箇所現われる.

$$T = \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & j_4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G_e & -G_e & G_0 & -G_0 \\ -G_e & G_e & -G_0 & G_0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G_0 & -G_0 & G_e & -G_e \\ -G_0 & G_0 & -G_e & G_e \end{bmatrix} \begin{matrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{matrix} \quad (33)$$

$$G_e = \frac{C}{\tau}, \quad G_0 = -z^{-1} \frac{C}{\tau} \tag{34}$$

$$z = e^{sT}, \quad \tau = 1/2f_c \tag{35}$$

ここで、 $f_c$  は、クロックの周波数であり、dutyを50%として仮定している。(33)式より、 $X(e)$ のCによる

1次導関数は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial X(e)}{\partial C} &= \frac{1}{\tau} \cdot \frac{\partial X(e)}{\partial G_e} - \frac{z^{-1}}{\tau} \cdot \frac{\partial X(e)}{\partial G_0} \\ &= \frac{1}{\tau} \sum_{f=1}^2 \sum_{i=1}^2 (-1)^{f+i} \det T \begin{pmatrix} i_f \\ j_i \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{\tau} \sum_{f=3}^4 \sum_{i=3}^4 (-1)^{f+i} \det T \begin{pmatrix} i_f \\ j_i \end{pmatrix} \\ &\quad - \frac{z^{-1}}{\tau} \sum_{f=1}^2 \sum_{i=3}^4 (-1)^{f+i} \det T \begin{pmatrix} i_f \\ j_i \end{pmatrix} \\ &\quad - \frac{z^{-1}}{\tau} \sum_{f=3}^4 \sum_{i=1}^2 (-1)^{f+i} \det T \begin{pmatrix} i_f \\ j_i \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{36}$$

と表わせる。右辺の各々の項に(18)式の結果を適用すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial X(e)}{\partial C} &= \frac{\det T}{\tau} \left\{ \sum_{f=1}^2 \sum_{i=1}^2 (-1)^{f+i} q(j_i, i_f) \right. \\ &\quad + \sum_{f=3}^4 \sum_{i=3}^4 (-1)^{f+i} q(j_i, i_f) \\ &\quad - z^{-1} \sum_{f=1}^2 \sum_{i=3}^4 (-1)^{f+i} q(j_i, i_f) \\ &\quad \left. - z^{-1} \sum_{f=3}^4 \sum_{i=1}^2 (-1)^{f+i} q(j_i, i_f) \right\} \end{aligned} \tag{37}$$

となる。次に、Cによる $X(e)$ の2次の導関数を考える。(33)式の行列式の性質より、 $\det T$ において、 $G_e$ と $G_0$ の積が存在しないことに注意すると、2次導関数は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X(e)}{\partial C^2} &= 2 \left\{ \frac{1}{\tau^2} \cdot \frac{\partial^2 X(e)}{\partial G_e^2} + \frac{z^{-2}}{\tau^2} \cdot \frac{\partial^2 X(e)}{\partial G_0^2} \right\} \\ &= 2 \left\{ \frac{1}{\tau^2} \sum_{f_1=1}^2 \sum_{i_1=1}^2 \sum_{f_2=3}^4 \sum_{i_2=3}^4 (-1)^{f_1+f_2+i_1+i_2} \det T \begin{pmatrix} i_{f_1} & i_{f_2} \\ j_{i_1} & j_{i_2} \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \frac{z^{-2}}{\tau^2} \sum_{f_1=1}^2 \sum_{i_1=3}^4 \sum_{f_2=3}^4 \sum_{i_2=1}^2 (-1)^{f_1+f_2+i_1+i_2} \det T \begin{pmatrix} i_{f_1} & i_{f_2} \\ j_{i_1} & j_{i_2} \end{pmatrix} \right\} \end{aligned} \tag{38}$$

と表わすことができる。次に、上式の右辺の第2項の $j_{i_1}$ と $j_{i_2}$ を交換する。つまり、列を一度入れ換えると、第2項は、第1項に $z^{-2}$ を掛けたものに一致する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X(e)}{\partial C^2} &= 2 \left\{ \frac{1}{\tau^2} \sum_{f_1=1}^2 \sum_{i_1=1}^2 \sum_{f_2=3}^4 \sum_{i_2=3}^4 (-1)^{f_1+f_2+i_1+i_2} \right. \\ &\quad \cdot \det T \begin{pmatrix} i_{f_1} & i_{f_2} \\ j_{i_1} & j_{i_2} \end{pmatrix} - \frac{z^{-2}}{\tau^2} \sum_{f_1=1}^2 \sum_{i_1=3}^4 \sum_{f_2=3}^4 \sum_{i_2=1}^2 (-1)^{f_1+f_2+i_1+i_2} \end{aligned}$$

$$\cdot \det T \begin{pmatrix} i_{f_1} & i_{f_2} \\ j_{i_2} & j_{i_1} \end{pmatrix} \left. \right\} \tag{39}$$

従って、(18)式と(24)式より、

$$\frac{\partial^2 X(e)}{\partial C^2} = \frac{2 \cdot \det T}{\tau^2} \cdot (1-z^{-2}) \cdot \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix} \tag{40}$$

但し、

$$\begin{cases} q_{11} = q(j_1, i_1) - q(j_2, i_1) - q(j_1, i_2) + q(j_2, i_2) \\ q_{22} = q(j_3, i_3) - q(j_4, i_3) - q(j_3, i_4) + q(j_4, i_4) \\ q_{21} = q(j_3, i_1) - q(j_4, i_1) - q(j_3, i_2) + q(j_4, i_2) \\ q_{12} = q(j_1, i_3) - q(j_2, i_3) - q(j_1, i_4) + q(j_2, i_4) \end{cases} \tag{41}$$

となる。

ここまでは、Cが、行列T中の16箇所に存在するとして議論を進めた。しかし、接地してあるCや分母、分子導出の際の行及び列の操作の影響を受けたCは、この仮定は成立しない。この場合も、3.のアナログ回路で行なったように、Tに1行1列を付け加えることによって、16箇所に存在する場合と同様の表現が可能となる。(37)、(40)式の結果と異なる点は、やはり、Tに存在しないCに対応する $q(j, i)$ を0と置くことだけである。また、定数利得従属電源の利得に関する感度も、キャパシタと同様に考えることができ、(37)、(40)式において $\tau$ を1、 $z^{-1}$ を0とすればよい。

J. Vlachらの方法<sup>12)</sup>は、回路関数が任意の素子に関して双一次である条件が必要となる。従って、SC回路にその方法を適用した場合、(33)式から明らかなように、1つの素子を4つの素子と考え、その処理を行なう必要がある。その結果、3.で示した記憶容量と乗算回路は、各々、約16倍、4倍となってしまふ。

### 5. 例題

本理論を適用し、感度解析を行なった例を以下に示す。

まず、図3のリップル1.0dBの通過域チェビチエフ特性の7次低域フィルタにおいて、電圧伝達関数H(s)に関する感度を求める例について示す。図4(a)は、

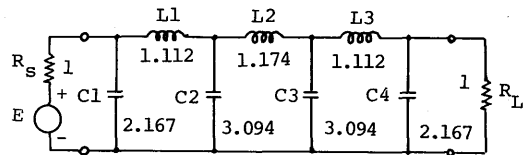


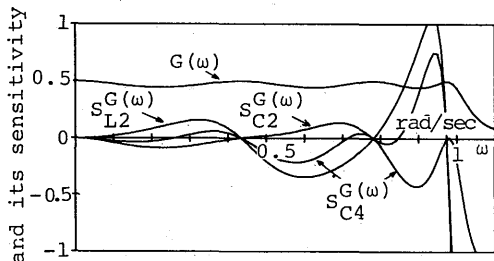
図3 7次低域フィルタ(単位: Ω, F, H)  
Fig.3 7th order lowpass filter.

電圧伝達関数の微分利得感度の周波数特性を示している。この利得感度特性は、分母, 分子の導関数を(2)式に代入し、更に、次式を計算することにより求められる。

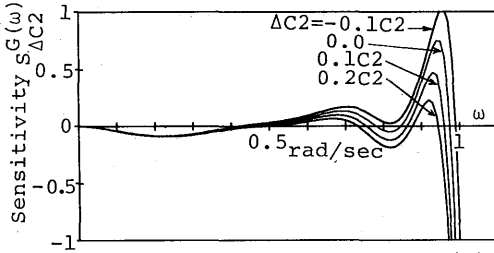
$$S_{e_k}^{G(\omega)} \triangleq \frac{e_k}{G(\omega)} \cdot \frac{\partial G(\omega)}{\partial e_k} = R_e [S_{e_k}^{H(\omega)}] \quad (42)$$

$$G(\omega) \triangleq |H(\omega)|$$

また、分母, 分子の導関数を用いることによって、微分感度に限らず、素子値が大きく変化した場合の感度も正確に計算することができる。図4(b)は、図3のC<sub>2</sub>が10%, 20%, -10% 変化した場合の利得感度を、



(a) Gain and its sensitivity  $S_{e_k}^{G(\omega)}$



(b) Large change sensitivity  $S_{\Delta C_2}^{G(\omega)}$

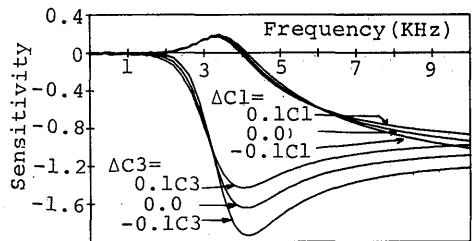
図4 図3の回路の利得感度

Fig.4 Gain sensitivity of the network shown in Fig.3.

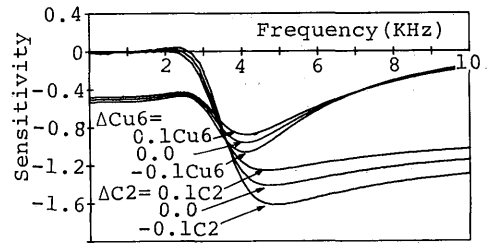
0%の変化, つまり、微分利得感度と比較したものである。

更に、本理論は、複素内挿法<sup>(9)</sup>と組み合わせることによって、回路関数及び感度を複素周波数の有理関数の形で求めることも可能である。その結果、それらの周波数特性を効率良く計算できることはもちろん、極, 零点の計算や極, 零点の感度解析等とその応用範囲は、更に広がる。

次に、図5のSC回路について、本理論を適用した改良節点法<sup>(8)</sup>を用いて電圧伝達関数を求め、素子値が10%, -10% 変化した場合の利得感度と微分利得感度を計算し、比較したのが図6である。分母, 分子の導関数を用いた感度解析では、この様に、素子の任意



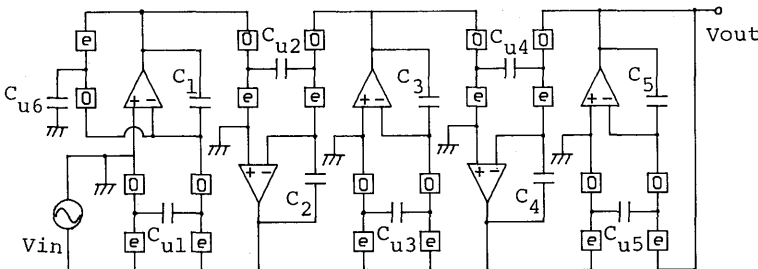
(a) Gain sensitivity to C1 and C3



(b) Gain sensitivity to C2 and C6

図6 図5の回路の利得感度

Fig.6 Gain sensitivity of the network shown in Fig.5.



$f_p$  (cutoff)=3.4KHz  
 $f_c$  (clock)=128KHz  
 $C_1=C_5=4.20288$   
 $C_3=11.98343$   
 $C_2=C_4=9.69460$   
 $C_{u1} C_{u6}=1.0$

図5 Leapfrog SC回路<sup>(2)</sup>  
 Fig.5 Leapfrog SC network<sup>(2)</sup>

の変化幅を対して、分母、分子導関数を求め直すことなしに、正確に計算できる特徴がある。

## 6 むすび

回路関数の分母、分子の導関数を求め、周波数領域での感度解析を行なう方法について述べた。本文では、まず、デジタル回路の場合を例にして、J. Vlachらの冗長度を改善した本法の基本的な考え方について説明した。冗長度の改善によって、理論は、見通しのきく形で整理され、アナログ回路、SC回路へ拡張を容易にした。更に、その拡張で得られた方法は、多くの素子について感度解析を行なう場合ほど、報告されている方法に比べ、必要な記憶容量と乗算回数で有利となる。また、本方法の基本となる計算は、行列式と逆行列の計算であり、そのプログラミングは、組織的かつ容易に行なうことができる。

本論文では、SC回路の感度解析において、2相クロックで動作する回路に限ってその手順を説明したが、本理論は、多相クロックのSC回路の場合でも、高次感度まで拡張することができる。SC回路のより一般的な感度解析法については、別の機会に報告する予定である。

## 文 献

- (1) P. M. Lin and L. O. Chua: "Computer Aided Analysis of Electronic Circuits", Prentice Hall, Ch. 15 (1975).
- (2) 国枝, 金子, 小野田: "スイッチトキャパシタ回路の随伴回路を用いた素子感度解析", 信学論(A), J65-A, 1, pp. 116-123 (昭57-01).
- (3) A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer: "デジタル信号処理(伊達玄訳)", コロナ社(昭53).
- (4) P. R. Adby: "Applied circuit theory: matrix and computer method", John Wiley and Sons, Ch. 9 (1980).
- (5) G. S. Moshytz and P. Horn: "Reducing nonideal op-amp effects in active filters by minimizing the gain-sensitivity product (GSP)", IEEE Trans. Circuit & Syst., CAS-24, 8, pp. 437-445 (Aug. 1977).
- (6) J. Vlach and K. Singhal: "Sensitivity mini-

- mization of networks with operational amplifiers and parastics", IEEE Trans. Circuit & Syst., CAS-27, 8, pp. 688-697 (Aug. 1980).
  - (7) G. E. Alderson and P. M. Lin: "Computer generation of symbolic network functions-A new theory and implementation", IEEE Trans. Circuit Theory, CT-20, 1, pp. 48-55 (Jan. 1973).
  - (8) S. E. Belter and S. C. Bass: "Computer-aided analysis and design of digital filters with arbitrary topology", IEEE Trans. Circuit & Syst., CAS-22, 10, pp. 810-819 (Oct. 1975).
  - (9) 本間, 佐川: "複数個の同種記号について整理された回路関数を与える記号解析", 信学論(A), J66-A, 5, pp. 424-431 (昭58-05).
  - (10) 高村, 太田, 松本: "分割手法とFFTを用いた線形回路網の記号解析", 信学論(A), J65-A, 11, pp. 1152-1159 (昭57-11).
  - (11) K. Yeung: "Symbolic network function generation via discrete fourier transform", IEEE Trans. Circuit & Syst., CAS-31, 2, pp. 229-231 (Feb. 1984).
  - (12) K. Singhal and J. Vlach: "Symbolic analysis of analog and digital circuits", IEEE Trans. Circuit & Syst., CAS-24, 11, pp. 598-609 (Nov. 1977).
  - (13) 本間, 伊藤, 佐川: "線形回路網の分母、分子素子感度解析", 信学技報, CAS84-20 (1984-06).
  - (14) R. E. Crochiere and A. V. Oppenheim: "Analysis of linear digital networks", IEEE Proc., 63, 4, pp. 581-595 (April 1975).
  - (15) 高木貞治: "代数学講義", 共立出版, 8章(昭47, 改訂新版12刷).
  - (16) C. W. Ho, A. E. Ruehil and P. A. Brennan: "The modified nodal approach to network analysis", IEEE Trans. Circuit & Syst., CAS-22, pp. 504-509 (June 1975).
  - (17) E. Hökenek and G. S. Moschytz: "Analysis of general switched capacitor networks using indefinite admittance matrix", IEE Proc., 127, Pt. G, pp. 21-32 (Feb. 1980).
  - (18) R. Plodeck, U. W. Brugger, D. C. Grunigen and G. S. Moschytz: "SCANAL-A program for the computer-aided analysis of switched capacitor networks", IEE Proc., 128, Pt. G, pp. 277-285 (Dec. 1981).
- (昭和59年12月14日受付, 60年3月15日再受付)