電子通信学会論文誌 '86/2 Vol. J69-A No. 2

研究速報

係数変動に対するフルビッツ多項式の安定限界

正員　本間　仁志[†]　　准員　森　幸男[†]
正員　佐川　雅彦[†]

A Stability Criterion for Hurwitz Polynomials with Pertubed Coefficients

Hitoshi HONMA[†], *Member*, Yukio MORI[†], *Associate Member* and Masahiko SAGAWA[†], *Member*

[†] 東京都立大学工学部電気工学科，東京都
Faculty of Technology, Tokyo Metropolitan University, Tokyo, 158 Japan

あらまし　フルビッツ多項式の性質を維持し，多項式の係数が変動できる限界を求める方法を示す．本方法では，従来の方法の持っていた手順の煩雑さ，計算の不安定さの問題を改善している．

1. まえがき

特性多項式がフルビッツ多項式であるかどうかの判定は，係数値が一意に決まれば，報告されている多くの方法で，係数の関係から容易に行うことができる[(1)]．しかし，実際のシステムの特性多項式は，多くの場合，素子の製造偏差，外的要因による素子値の変動等の影響でその設計値と異なってしまう．従って，システムの安定性の保証のためには，素子の変動，つまり多項式の係数の変動を考慮した安定判別法が必要になる．特に，集積回路の発達に伴い，製造偏差等に対する影響をシステムの実現の前に解析する必要性がより高まっている．

この様な特性多項式の変動と安定性の問題に対して，BarmishやGarloffらは，多項式の係数が安定性を維持し変化できる限界を求める方法を報告している[(2),(3)]．この方法では，要素として変数を含むフルビッツ行列式を，変数の多項式として展開して，その根を求め，そして最小の実根を選び出し限界値としている．しかし，この方法は，フルビッツ行列式の多項式展開という煩雑な手順が必要であり，また，この煩雑な処理によって，もとの多項式係数の情報を失い易く，実根と複素根の判別が不可能になるという計算の不安定性の問題がある．そこで，本論文では，これらの問題を解決するために，行列式の多項式展開ではなく，与えられた多項式に単純な変数変換を施し，その１つの実根の値より係数の変動限界を決定する方法を示す．

2. 準　備

今，全ての根が虚軸を含まない複素平面の左半面にある実係数フルビッツ多項式を，

$$f(s)=a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n \tag{1}$$

と一般的に表わす．次に，式(1)に対して，数値係数の変動を考慮した多項式を次式で表わす．

$$f(s,\ t)=(a_0\pm b_0t)s^n+(a_1\pm b_1t)s^{n-1}+\cdots+(a_n\pm b_nt) \tag{2}$$

但し，$b_i\geqq 0,\ i=0,\ 1,\cdots,\ n$

ここで，t は係数のズレを決める実変数であり，$t=0$ で $f(s,\ t)$ は式(1)の $f(s)$ に一致する．また，b_i は，その重みであり，実数値とする．本論文の目的は，式(2)において，フルビッツ多項式の性質を維持できる最大の t の値を求めることにある．

式(2)の係数変化の組み合わせは，全ての符号変化を考慮すると 2^{n+1} 個ある．式(2)の安定限界を決める t の値は，全ての組み合わせに対応する各々の多項式で求められた t の限界の最小値となる．この 2^{n+1} 個の多項式の限界は，次の４つの多項式の限界に置き換わることが報告されている[(2)]．

$$\left.\begin{aligned}
f_1(s,t)&=\underline{a}_0s^n+\underline{a}_1s^{n-1}+\overline{a}_2s^{n-2}+\overline{a}_3s^{n-3}+\underline{a}_4s^{n-4}+\cdots\\
f_2(s,t)&=\overline{a}_0s^n+\underline{a}_1s^{n-1}+\underline{a}_2s^{n-2}+\overline{a}_3s^{n-3}+\overline{a}_4s^{n-4}+\cdots\\
f_3(s,t)&=\overline{a}_0s^n+\overline{a}_1s^{n-1}+\underline{a}_2s^{n-2}+\underline{a}_3s^{n-3}+\overline{a}_4s^{n-4}+\cdots\\
f_4(s,t)&=\underline{a}_0s^n+\overline{a}_1s^{n-1}+\overline{a}_2s^{n-2}+\underline{a}_3s^{n-3}+\underline{a}_4s^{n-4}+\cdots\\
&\text{但し，}\ \overline{a}_i=a_i+b_it,\quad \underline{a}_i=a_i-b_it
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

結局，式(2)の限界を求める問題は，式(4)に示すような符号を限定しない重み c_i を持つ多項式の安定限界をどう求めるかに帰着する．

$$f(s,\ t)=a_0(t)s^n+a_1(t)s^{n-1}+\cdots+a_n(t) \tag{4}$$

但し，$a_i(t)=a_i+c_it$

BarmishやGarloffらは，式(4)の限界を，変数 t を要素として含んだフルビッツ行列式を多項式展開し，その多項式の根の値より求めた．しかし，行列式の多項式展開には，煩雑な手順が必要であり，またもとの係数が持っている情報を失い易い．そこで，以下では，行列式展開を行なうことなしに，係数の変動限界を求める方法を示す．

3. 安定限界の導出

ここでは，t が０から連続的に変化した場合に，式(4)が安定限界となる t の値を求める方法について述べる．この安定限界とは，t の変化によって，式(4)が初めて虚軸上に，もしくは無限遠点に根を持った状態をいう．

まず，安定限界の導出に必要な良く知られた定理をあげておく．

〔補助定理1〕　代数方程式の根は，係数の連続関数となる[4]．

〔補助定理2〕　方程式 $f(q)=0$ の根の虚数部の符号が全部同一であるとき，係数の実部と虚部とを分けて，$f(q)=U(q)+jV(q)$ とすれば，$U(q)$ と $V(q)$ は全て実根のみを持ち，かつ $U(q)$ の根と $V(q)$ の根とは隔離する．また，逆も成り立つ[4]．

〔補助定理3〕　方程式 $f(q)=0$ が虚軸上に共役根を持つとき，その根は $f(q)$ の偶関数部 $f_e(q)=0.5[f(q)+f(-q)]$ と奇関数部 $f_0(q)=0.5[f(q)-f(-q)]$ の共通根となる[1]．

フルビッツ多項式 $f(s)$ を変数変換 $s=js$ し得られる多項式 $f(js)$ の根は，その虚数部の符号が全て同一であり補助定理2が成立する．また $f(js)=U(s)+jV(s)$ の $U(s)$，$V(s)$ の根に関して次の定理がいえる．

〔定理1〕　式(4)の $f(s,t)$ が $t=t_k$ で虚軸上に有限な根を持つとき，$f(s,t)$ を変数変換 $s=js$ し得られる方程式 $f(js,t_k)=U(s,t_k)+jV(s,t_k)$ の $U(s,t_k)$，$V(s,t_k)$ は，共通の実根を持つ．

〔証明〕　$U(s,t_k)$，$V(s,t_k)$ は，$f(s,t_k)$ の偶関数部 $f_e(s,t_k)$，奇関数部 $f_0(s,t_k)$ と次の関係がある．

$$U(s,t_k)=f_e(js,t_k)$$

$$V(s,t_k)=-jf_0(js,t_k)$$

$f(s,t_k)$ が虚軸上に根 $\pm js_k$ を持つとき，補助定理3より $f_e(s,t_k)$ と $f_0(s,t_k)$ は $\pm js_k$ の共通根を持つ．従って $f_e(js,t_k)$，$f_0(js,t_k)$，つまり $U(s,t_k)$，$V(s,t_k)$ は，$\pm s_k$ の共通の実根を持つ．$f(s,t_k)$ が原点に根を持つ場合も，明らかに，$U(s,t_k)$，$V(s,t_k)$ は原点に根を持つ．

補助定理1，補助定理2と定理1より，t が0から連続的に変化した場合，式(4)の $f(s,t)$ が初めて虚軸上に根を持つ t の値は，$U(s,t)$ と $V(s,t)$ が初めて共通の実根を持つ t の値に等しい．従って，この場合の t の値は，以下の手順で計算される．

手順1：$f(s,t)$ を変数変換 $s=js$ し，$U(s,t)$，$V(s,t)$ を求める．

例として，

$$f(s,t)=(1-2t)s^3+(3-t)s^2+(4+t)s+(2-3t) \tag{5}$$

を考えると，

$$U(s,t)=-(3-t)s^2+(2-3t) \tag{6}$$

$$V(s,t)=-(1-2t)s^3+(4+t)s \tag{7}$$

となる．$U(s,t)$，$V(s,t)$ の根は，t の値が決まると一意に求まる．

手順2：$U(s,t)$，$V(s,t)$ の各々を，t に関する項と無関係な項に分ける．

$$U(s,t)=U_1(s)+U_2(s)t=(-3s^2+2)+(s^2-3)t \tag{8}$$

$$V(s,t)=V_1(s)+V_2(s)t=(-s^3+4s)+(2s^3+s)t \tag{9}$$

手順3：$t=-U_1(s)/U_2(s)$，$t=-V_1(s)/V_2(s)$ の形に変形する．

$$t=(3s^2-2)/(s^2-3) \tag{10}$$

$$t=(s^3-4s)/(2s^3+s) \tag{11}$$

手順4：$U_1(s)V_2(s)-V_1(s)U_2(s)=0$ を展開し整理する．

この関係式は，$U(s,t)$ と $V(s,t)$ が常に共通の t の値をとるという条件より得られる．

$$5s^5+6s^3-14s=0$$

また，$x=s^2$ とおけば，

$$s(5x^2+6x-14)=0 \tag{12}$$

手順5：手順4で得られた多項式の実根を求める．

この根は，$U(s,t)$，$V(s,t)$ の共通根となる．式(12)の根は，

$$s=0,\quad x=-2.377,\quad x=1.177 \tag{13}$$

となる．安定限界における $U(s,t)$，$V(s,t)$ の共通根は，実根であり，その場合の x の根は正の実根となる．従って，式(13)の $x=-2.377$ は以後考える必要はない．

手順6：手順5で求めた根の値を式(10)に代入し，最小の $|t|$ の値 t_0' を求める．

式(13)の $s=0$，$x=1.177$ の根に対応する t の値は，$t=0.6667$，$t=-0.8411$ となる．この値は，t の正と負の連続変化に対し，式(5)が初めて虚軸上に有限な根を持つ値である．$|t|$ の最小値 t_0' は，

$$t_0'=0.6667 \tag{14}$$

となる．

$f(s,t)$ が初めて虚軸上に有限な根を持つ t の値は，以上の手順で求めることができる．

安定限界を考える場合，虚軸上の有限な根の他に，t の変化によって，多項式が無限遠点に根を持つ限界を検討する必要がある．t の有限な変化で式(4)が無限大の根を持つ条件は，

$$a_0+c_0t=0$$

であり，上式を成立させる t の値の絶対値 t_0'' は，

$$t_0''=|-a_0'/c_0| \tag{15}$$

となる．従って式(4)の安定限界は t_0 は，t_0'，t_0'' の最

小値，

$$t_0 = \min\{t_0', t_0''\} \tag{16}$$

となる．式(5)の例では，$t_0 = 0.5$ となる．

以上の方法は，行列式の多項式の展開の代わりに，手順4の単純な多項式演算を行えばよく，従来の方法の持っていた手順の煩雑さ，数値計算の不安定性の問題を改善している．

4. むすび

フルビッツ行列式の多項式展開を行うことなく，係数変動に対する安定限界を求める方法を示した．この方法は，従来の方法に比べ，手順が簡単であり，多項式係数の持つ情報を失いにくいという特徴を持っている．

今後は，更に，システムを構成する素子と多項式係数の関係を考慮し，係数変動の重みの適切な選択について検討を進める予定である．

謝辞　有益な御教示を頂いた，東京工業大学小野田真穂樹教授に厚く感謝する．また，日頃，暖かい御教示を頂く，長岡技術科学大学神林紀嘉助教授に感謝する．

文　献

(1) 高橋，有本：“回路網とシステム理論”，コロナ社，6章（昭52再版）．

(2) S. Bialas and J. Garloff：“Stability of polynomials under coefficient perturbation”，IEEE Trans. Autom. Control，AC-30，3，pp.310-312（March 1985）．

(3) B.R. Barmish：“Invariance of strict Hurwitz property for polynomials with perturbed coefficients”，IEEE Trans. Autom. Control，AC-29，10，pp.935-936（Oct. 1984）．

(4) 高木貞治：“代数学講義”，共立出版，2章（昭47，改訂新版12刷）．

（昭和60年9月6日受付）