

再帰形 FIR フィルタの並列処理法

准員 伊藤 一広<sup>†</sup> 正員 本間 仁志<sup>†</sup>  
 正員 佐川 雅彦<sup>†</sup>

A Parallel Processing Method for Recursive FIR Filters  
 Kazuhiro ITOH<sup>†</sup>, Associate Member, Hitoshi HONMA<sup>†</sup> and Masahiko SAGAWA<sup>†</sup>, Member

<sup>†</sup> 東京都立大学工学部電気工学科, 東京都  
 Faculty of Technology, Tokyo Metropolitan University, Tokyo, 158 Japan

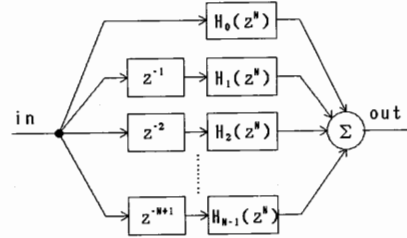


図1 並列処理方式デジタルフィルタ  
 Fig. 1 Parallel processing digital filter.

あらまし 総演算量の低減を目的に提案された再帰形 FIR フィルタに対して, その並列処理法を検討した。その結果, 総演算量が少なく, かつ並列処理可能な構成法が得られた。

1. まえがき

近年, 高速にフィルタリングを行うための方法が, 高周波信号の実時間処理を目的として盛んに研究されている。その研究の主眼の一つは, 単位時間当りに必要な演算量をいかに低減するかにある。この目的を達成するために, フィルタリングに要する総演算量を低減する方法と, 複数個のプロセッサを用いて演算を並列に処理する方法が二つの立場からそれぞれ研究されている。

本文では, 総演算量を低減するために提案された再帰形 FIR フィルタ<sup>(3)-(9)</sup>の伝達関数を並列分解する方法を提案する。その結果, 総演算量の低減, 並列処理の両点から検討された構成法が得られる。

2. 並列処理法の提案

ここでは, まず従来の並列処理法を簡単に説明する<sup>(1)</sup>。次に, 本文で対象とする再帰形 FIR フィルタについて述べ, その再帰形 FIR フィルタのための並列処理法を提案する。

2.1 デジタルフィルタの並列処理法

伝達関数  $H(z)$  が与えられたとき, これを  $N$  個に分割し, 並列に処理する方法の一つを述べる。この目的のために, 伝達関数  $H(z)$  を,

$$H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} H_i(z^N) z^{-i} \quad (1)$$

のように  $N$  個のサブフィルタに分解する。このとき, 上式は図1の構成を与える。また各サブフィルタ  $H_i(z^N)$  は  $z^N$  の有理関数であり,  $N$  通路フィルタを用いて構成できる<sup>(2)</sup>。その結果, 各サブフィルタにおける動作レートが直接構成した場合の  $1/N$  に低減する。しかし再帰形 FIR フィルタの伝達関数に対して従来法<sup>(1)</sup>を適用し, 式(1)のように複数個のサブフィルタに

分解した場合には, 有限インパルス応答を有し, かつ総演算量が少ないという再帰形 FIR フィルタの特徴が維持できない。

2.2 再帰形 FIR フィルタの並列処理法

本文では, 代表的な再帰形 FIR フィルタであり, プレフィルタとしても応用可能な次式の伝達関数を取り扱う<sup>(3)-(9)</sup>。

$$H(z) = \frac{Q(z)}{1 - (-1)^M z^{-L}} \quad (2)$$

ここで,

$$Q(z) = \sum_{n=0}^{K-1} q_n z^{-n} \quad (3)$$

但し,  $Q(z)$  の係数  $q_n$  は既に有限語長で量子化されており, 更に  $Q(z)$  は分母の  $(1 - (-1)^M z^{-L})$  で整除できるものとする。また, 式(2)における  $L$  と  $M$  の値は,  $Q(z)$  の係数  $q_n$  を表現する有限語長を効果的に低減するようにフィルタの中心周波数および帯域幅を考慮して一意的に決定される。 $L, M$  の詳細な決定法は, 文献(7)を参照されたい。ここでは,  $H(z)$  が有限インパルス応答を有するという条件を維持するように, 式(2)を式(1)のように任意の  $N$  個のサブフィルタに分解する方法を提案する。

まず式(2)を, 以下のように二つの伝達関数の積として表現する。

$$H(z) = H_A(z) \cdot H_B(z) \quad (4)$$

但し,

$$H_A(z) = \frac{Q(z)}{1 - \alpha z^{-D}} \quad (5)$$

$$H_B(z) = \frac{1 - \alpha z^{-D}}{1 - (-1)^M z^{-L}} \quad (6a)$$

である。ここで, 式(5), (6a)における  $\alpha$  は,

$$\alpha = (-1)^{MD/L} \quad (6b)$$

と与えられる。また, 整数値  $D$  は, 式(2)の分母多項式の次数  $L$  と所望の分解数  $N$  との最小公倍数であり, あらかじめ決定された  $L$  の値から一意的に決めら

れる。もし、 $D$  の値をこのように選択せず、従来法を用いて再帰形 FIR フィルタの伝達関数を分解した場合、分母係数の  $\{\pm 1, 0\}$  が保証できず、そのため有限語長の影響により、分母と分子の整除性が一般に維持できないことに注意する。 $L$  と  $D$  のこのような関係によって、式(6 a)の分子をその分母によって割り切ることができ、後で述べるように式(6 a)の構成は、 $\{\pm 1, 0\}$  を係数とする非再帰形 FIR フィルタとなる。また、式(2)の  $L$  の値が分解数  $N$  の整数倍である場合には、 $H_B(z) = 1$  となり式(4)のような分解は必要ないことに注意する。

次に、この  $H_A(z), H_B(z)$  をそれぞれ  $N$  個のサブフィルタに分解する。まず  $H_A(z)$  に対して、次式のような分解を施す。

$$H_A(z) = \sum_{i=0}^{N-1} H_{Ai}(z^N) z^{-i} \quad (7)$$

但し、

$$H_{Ai}(z^N) = \frac{Q_i(z^N)}{1 - \alpha z^{-D}} \quad (8)$$

$$Q_i(z^N) = \sum_{j=0}^{\{(K-1)/N\}} q_{Nj+i} z^{-Nj} \quad (9)$$

$$q_{Nj+i} = 0, Nj+i > K-1 \quad (10)$$

である。式(5)の分子  $Q(z)$  の分解は、従来の非再帰形 FIR フィルタに対する分解法と同様であり、 $N$  個おきにフィルタ係数を間引くことに相当する。

一方、式(6 a)の  $H_B(z)$  に対しては、 $D$  が  $L$  と  $N$  の最小公倍数であるため、まず次式のように書き直すことができる。

$$H_B(z) = \frac{1 - \alpha z^{-D}}{1 - (-1)^M z^{-L}} \quad (11)$$

$$= \sum_{m=0}^{D/L-1} \{(-1)^M z^{-L}\}^m \quad (12)$$

$$= \sum_{m=0}^{D-L} h_m z^{-m} \quad (13)$$

$$h_m = \begin{cases} (-1)^{mM/L}, & (m \bmod L \equiv 0) \\ 0, & (m \bmod L \neq 0) \end{cases} \quad (14)$$

したがって、式(9)の場合と同様にフィルタ係数を  $N$  個おきに間引くことによって、上式からサブフィルタ  $H_{Bj}(z^N)$  を得ることができる。すなわち、

$$H_B(z) = \sum_{j=0}^{N-1} H_{Bj}(z^N) z^{-j} \quad (15)$$

$$H_{Bj}(z^N) = \sum_{i=0}^{\{(D-L)/N\}} h_{Ni+j} z^{-Ni} \quad (16)$$

ここで、サブフィルタの係数  $h_{Ni+j}$  は、各サブフィルタにおいて高々 1 個の係数のみが値を取り得ることに注意する。このとき、式(16)は次式で置き換えられる。

$$H_{Bj}(z^N) = h_{Ni+j} z^{-N \cdot G}, h_{Ni+j} \in \{0, \pm 1\} \quad (17)$$

但し、 $G$  は  $j, L, N$  によって決定される正の整数を表す。

以上のように、分解前のフィルタ係数を変更することなしに、 $H_A(z), H_B(z)$  をそれぞれ  $N$  個のサブフィルタに分解できる。式(4)から明らかなように、結局、原伝達関数  $H(z)$  は、 $N$  個のサブフィルタから成るこの二つの  $N$  並列回路を縦続に接続することによって得られる。このようにして得られる  $H(z)$  は、原フィルタ係数を変更せずに構成されるため、有限インパルス応答を維持し、かつ各サブフィルタにおける動作レートは直接構成した場合の  $1/N$  である。

### 3. 設計例

以下の仕様を満たす低域通過フィルタの設計について考える。

- 仕様 通過域しゃ断周波数  $\omega_p: 0.05\pi$
- 阻止域しゃ断周波数  $\omega_s: 0.06\pi$
- 通過域リップル  $DB_p: 0.5\text{dB}$
- 阻止域減衰量  $DB_s: -60\text{dB}$

ここでは、まず再帰形のプレフィルタ  $P(z)$  を設計し、次にその特性を補正するイコライザ  $E(z)$  をプレフィルタと縦続に構成することによって、上述の仕様を満たすフィルタ  $H(z)$  を実現した。このような構成は、プレフィルタ-イコライザ構成と呼ばれ、再帰形 FIR フィルタの重要な適用例である<sup>(3)-(9)</sup>。

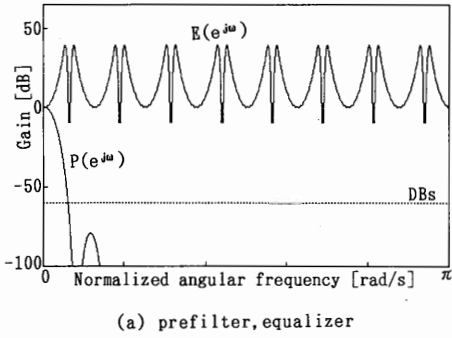
プレフィルタの伝達関数  $P(z)$  は、式(2)の分子係数を  $0, \pm 1$  に限定したものが対応する。ここでは、図 2 (a) のような特性を有する RRS (Recursive Running Sum) と呼ばれるプレフィルタを用いた<sup>(3)</sup>。低域通過特性を持つ RRS の伝達関数は、式(2)において  $L=1, M=0$  の場合に対応する。一方、イコライザ  $E(z)$  は、Remez のアルゴリズムに補間の概念を取り込んだ方法によって設計された<sup>(8),(9)</sup>。このとき  $E(z)$  は、

$$E(z) = \sum_{n=0}^{F(E-1)} e_n z^{-n} \quad (18)$$

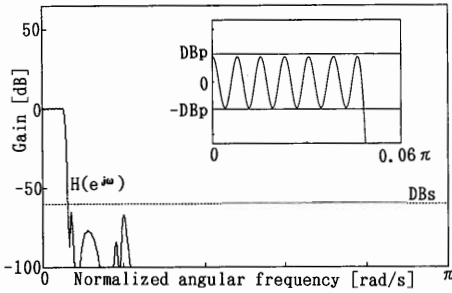
$$e_n = 0 \quad (n \neq 0, F, 2F, \dots, F(E-1)) \quad (19)$$

のように表される。但し、 $e_n$  はイコライザのインパルス応答、 $F(E-1)$  はイコライザの次数、 $F-1$  はインパルス応答間に挿入される零の個数を表す。

表 1 は、先の仕様を満たすフィルタを、プレフィルタ-イコライザ構成法により設計した場合と、Remez のアルゴリズムを用いて直接設計した場合<sup>(10)</sup> のフィルタリングに要する演算量を示している。表 1 より、



(a) prefilter, equalizer



(b) prefilter-equalizer cascade

図2 並列構成されたフィルタの振幅特性

Fig. 2 Amplitude response of the filter constructed in parallel.

表1 フィルタリングに要する演算量

	直接設計 <sup>(10)</sup>	プレフィルタ	イコライザ
乗算器	205	0	15
加算器	408	12	28
遅延器	408	150	448

再帰形 FIR フィルタは、直接設計に比べ、低演算量で要求特性を実現できることがわかる。

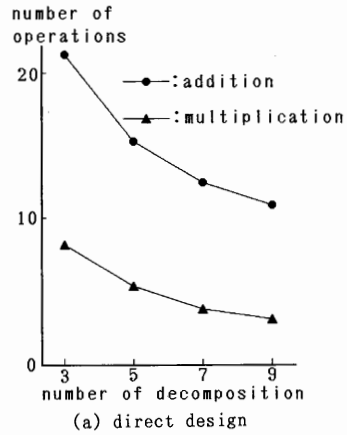
次に、設計された伝達関数を本手法により2分解並列処理する。まず最初に、プレフィルタ  $P(z)$  を式(4)のように  $P(z) = P_A(z)P_B(z)$  と、二つの伝達関数の積として表現する。その後、これら  $P_A(z)$ ,  $P_B(z)$  をそれぞれ、2.2で述べた方法により2分解並列構成する。但し、 $L=1$ であることから、式(4)から式(6a)における  $D$  の値は、分解数に一致し、 $D=2$ となる。このとき、乗算は必要なく、単位時間当りの加算数は分割によって低減する。一方、イコライザ  $E(z)$  は通常、非再帰形 FIR フィルタであるので、従来の非再帰形 FIR フィル

タに対する並列分解法を用いて分解することができる。

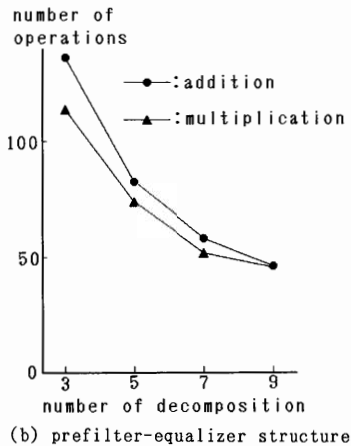
図2(b)では、並列構成されたプレフィルタとイコライザを縦続にしたフィルタ全体の特性を例示している。表2に、このときの単位時間当りの演算量を示す。ここで、単位時間当りの演算量とは、同タイミングで

表2 2分解並列構成における単位時間当りの演算量( $L=1, M=0, D=2$ )

	直接設計 <sup>(10)</sup>	プレフィルタ	イコライザ
乗算	103	0	8
加算	204	15	14



(a) direct design



(b) prefilter-equalizer structure

図3 分解数に対する演算量の変化

Fig. 3 Change of computational complexity for the number of decomposition. ( $L=1, M=0, D=3, 5, 7, 9$ )

動作する各サブフィルタの演算量の総和である。また分解数を大きくしたときの、演算量の変化のようすを図3に示す。図3(a)は直接設計、同図(b)はプレフィルタ-イコライザ構成の演算量である。但しこのとき、各分解数での式(4)から式(6a)における $D$ の値は、それぞれの分解数に等しい( $D=3, 5, 7, 9$ )。表2より、本法によって得られた構成は、単位時間当りの演算量を大幅に低減できることがわかる。また図3からわかるように、分解数を大きくすることによって、演算量の更なる低減が可能となる。ここでは、例として低域通過フィルタを取り上げたが、他の特性に対しても同様の結果が得られる。

## 6. むすび

本文では、再帰形 FIR フィルタの並列処理法を取り扱った。本法を用いることにより、再帰形 FIR フィルタの伝達関数を、そのフィルタ係数を変更することなく複数個のサブフィルタに分解することが可能となった。その結果、FIR フィルタを再帰形構成したことによる総演算量の低減、更に並列処理による単位時間当りの演算量の低減という二つの点から考慮された構成が得られた。従って、この構成における単位時間における演算量は、従来法に比べて著しく少ないことになる。

今後は、本法をフィルタバンクの設計に応用する予定である。

## 文 献

(1) K. Hayashi, K. K. Dhar, K. Sugahara and K. Hirano :

- "Design of high-speed digital filters suitable for multi-DSP implementation", IEEE Trans. Circuits and Syst., CAS-33, pp. 202-217 (Feb. 1986).
- (2) K. Sugahara, K. Hayashi, K. Hirano and S. K. Mitra : "N-path digital filters," Proc. IEEE Int. Conf. on Acoust., Speech and Signal Processing (March 1984).
- (3) J. W. Adams and A. N. Willson, Jr. : "A new approach to FIR digital filters with fewer multipliers and reduced sensitivity", IEEE Trans. Circuits and Syst., CAS-30, 5, pp. 277-283 (May. 1983).
- (4) H. Kikuchi, Y. Abe, H. Watanabe and T. Yanagisawa : "Efficient Prefiltering for FIR Digital Filters", Trans. IEICE, E70, 10, pp. 918-927 (Oct 1987).
- (5) 相川直幸, 佐藤正光 : "FIR フィルタのための新しいプリフィルタの構成法", 信学論(A), J71-A, 2, pp. 268-274 (昭63-02).
- (6) 白井孝治, 相川直幸, 佐藤正光 : "補間を用いた帯域通過形プリフィルタの設計法", 信学論(A), J72-A, 2, pp. 319-325 (平1-02).
- (7) 相川直幸, 葉軍, 佐藤正光 : "プリフィルタ-イコライザ構成による帯域通過フィルタの設計法", 信学技報, CAS87-238 (1988-03).
- (8) 本間仁志, 山田正一, 佐川雅彦 : "補間されたイコライザを用いた直線位相 FIR デジタルフィルタ", 信学論(A), J70-A, 8, pp. 1107-1115 (昭62-08).
- (9) 本間仁志, 伊藤一広, 佐川雅彦 : "インタポレータのための FIR フィルタの効果的な設計", 信学論(A), J72-A, 10, pp. 1697-1699 (平1-10).
- (10) J. H. McClellan, T. W. Parks and L. R. Rabiner : "A computer program for designing optimum FIR linear phase digital filters", IEEE Trans. Audio and Electroacoust., AU-21, pp. 506-526 (Dec 1973).

(平成2年1月12日受付, 4月26日再受付)