

ポリフェーズ部分行列に基づくオーバサンプルフィルタバンク

貴家 仁志<sup>†</sup>      小林 弘幸<sup>†</sup>

Oversampled Filter Banks Based on Polyphase Submatrices

Hitoshi KIYA<sup>†</sup> and Hiroyuki KOBAYASHI<sup>†</sup>

あらまし フィルタバンクの多くの応用では、最大間引きを使用できないものが少なくない。しかし、最大間引きフィルタバンクに比べ、オーバサンプルフィルタバンクに関する研究は十分に行われているとは言えない。本論文では、ポリフェーズ部分行列を定義し、この行列表現に基づきオーバサンプルフィルタバンクの完全再構成条件を与える。この表現に基づき、最大間引きフィルタバンクとの関係やオーバサンプルフィルタバンクのもつ設計の自由度、低遅延フィルタバンクのための設計条件を与える。また、DFT フィルタバンクに対してその表現を拡張する。このとき、最大間引き時には設計できない完全再構成 FIR DFT フィルタバンクが設計できることを示す。最後に設計例を通して本方法の有効性を確認する。

キーワード オーバサンプル、フィルタバンク、DFT フィルタバンク、ポリフェーズ行列

1. ま え が き

フィルタバンクは、画像やオーディオ信号のサブバンド符号化 [1],[2], サブバンド適応フィルタ [3],[4], フィルタの実現 [5],[6], トランスマルチプレクサ [7] および時間-周波数解析 [12],[14] 等の種々の応用をもつ。本論文では、オーバサンプルフィルタバンクについて、ポリフェーズ部分行列に基づく完全再構成条件を与え、それに基づきフィルタバンクを考察する。

従来のフィルタバンクの設計および実現に関する研究は、最大間引きフィルタバンクを中心に行われてきている。これは、サブバンド符号化において最大間引きの使用が望まれるためと考えられる。しかし、フィルタバンクの種々の応用では、サブバンド適応フィルタに代表されるように、最大間引きの使用が適さない。従来そのような応用には、多くの場合、完全再構成フィルタバンクではなく、近似的に再構成条件を満たしたフィルタバンクを設計して使用されてきた [3]~[6]。

しかし、オーバサンプルフィルタバンクの応用においても、フィルタバンクが完全再構成条件を満たすことが多くの場合必要である。また、黒沢らが指摘しているように一般にオーバサンプルフィルタバンクは、最大間引きの場合に比べ、設計において多くの

自由度をもつが、そのことを有効に利用していなかった [8],[9]。彼らは、オーバサンプルフィルタバンクのもつ自由度を利用して、 $M$  分割  $M-1$  間引きという場合を例にして、特性の改善や全体の遅延量が少なくなる例などを挙げている。

本論文で提案する表現は、二つの特徴を有する。一つは分割数  $M$  と間引き率  $D$  を任意の整数とする一般的議論であること、他の一つは、新しい表現としてポリフェーズ部分行列を導入し、それに基づいた考察である点である。これらの特徴により、レート異なるフィルタバンクに対して、共通性のある表現が可能となり、それらの関係を効果的に考察することが可能となる。また、設計条件をポリフェーズ部分行列を用いて表現することは、オーバサンプルフィルタバンクの設計における最適化などの際にも重要となる [16]~[18]。

更に、パラユニタリフィルタバンクや変調タイプの最大間引きフィルタバンクは多くの場合、ポリフェーズ行列を用いて表現され、設計されてきた [10],[11]。そのため、提案する表現は、最大間引きフィルタバンクの設計法をオーバサンプルフィルタバンクの設計に利用できるという利点ももつ。

本論文では、まず最初に、ポリフェーズ部分行列を定義し、それを用いて完全再構成条件を示す。次にその表現に基づき、オーバサンプルフィルタバンクの性質を考察する。その結果、最大間引きフィルタバンク

<sup>†</sup> 東京都立大学工学部電子情報工学科, 八王子市  
Faculty of Engineering, Tokyo Metropolitan University,  
Hachioji-shi, 192-03 Japan

との関係やオーバーサンプルフィルタバンクのもつ設計の自由度、低遅延フィルタバンクのための設計条件が与えられる。また、以上の議論を DFT フィルタバンクに拡張する。このとき、最大間引き時には用いることのできない、完全再構成 FIR DFT フィルタバンクが設計できることが示される。最後に、いくつかの設計例を通して本方法の有効性を確認する。また、本論文は文献 [13] を書き直したものである。主張する内容の一部が文献 [12] と重複するが、これらは同時期に独立に行われたものである。

## 2. 完全再構成条件のポリフェーズ行列表現

まず、準備としてポリフェーズ行列を用いたフィルタバンクの完全再構成条件を示す。次に、オーバーサンプルパラユニタリフィルタバンクを定義する。

図 1 は、正整数  $M$  および  $D$  の下で、チャンネル数が  $M$ 、間引き率  $D$  のフィルタバンクである。  $H_k(z)$  はアナライザフィルタ、  $F_k(z)$  はシンセサイザフィルタである。

ポリフェーズ行列  $E^D(z)$ 、  $R^D(z)$  は、次式のように定義される。

$$h(z) = E^D(z^D)e_D(z) \tag{1}$$

$$f^T(z) = z^{-(D-1)}\tilde{e}_D(z)R^D(z^D) \tag{2}$$

ここで、

$$h(z) = [H_0(z) H_1(z) \cdots H_{M-1}(z)]^T \tag{3}$$

$$f(z) = [F_0(z) F_1(z) \cdots F_{M-1}(z)]^T \tag{4}$$

$$e_D(z) = [1 z^{-1} \cdots z^{-(D-1)}]^T \tag{5}$$

$$\tilde{e}_D(z) = e_D^T(z^{-1}) \tag{6}$$

である。但し、 $T$  は行列の転置を示し、 $*$  は係数の複素共役をとることを示す。このとき、システムが完全再構成するための条件は、上記ポリフェーズ行列  $E^D(z)$ 、

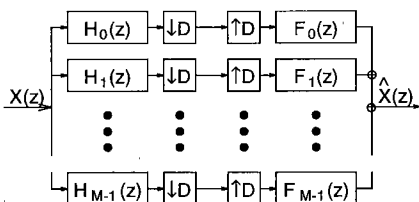


図 1 Mチャンネルフィルタバンク  
Fig. 1 An M channel filter bank.

$R^D(z)$  を用いて、

$$P^D(z) = R^D(z)E^D(z) = cz^{-m_0} \begin{bmatrix} \mathbf{o} & I_{D-r} \\ z^{-1}I_r & \mathbf{o} \end{bmatrix} \tag{7}$$

と与えられる [8],[9]。ここで、 $I_r$  は大きさが  $r \times r$  の単位行列、 $\mathbf{o}$  は零行列である。また、整数  $m_0, r (0 \leq r \leq M-1)$  はフィルタバンク全体の遅延量を決定するパラメータである。

間引き率  $D$  がチャンネル数  $M$  と等しいとき、図 1 は最大間引きフィルタバンクと呼ばれる。このフィルタバンクの完全再構成条件は、式 (7) の  $D$  に  $M$  を代入することにより次式のように得られる [10],[11]。

$$P^M(z) = R^M(z)E^M(z) = cz^{-m_0} \begin{bmatrix} \mathbf{o} & I_{M-r} \\ z^{-1}I_r & \mathbf{o} \end{bmatrix} \tag{8}$$

式 (7) および式 (8) におけるパラメータ  $r$  は、前述のとおり信号出力のタイミングを決定するパラメータである。すなわち、ある  $r$  における伝達関数と  $r=0$  における伝達関数は、遅延量が異なるのみであり、フィルタの伝達関数の設計には無関係である [10]。従って、以降の完全再構成条件の議論では、議論を簡単にするため、 $r=0$  の場合のみに注目し、式 (7) および式 (8) を

$$P^D(z) = R^D(z)E^D(z) = cz^{-m_0}I_D \tag{9}$$

$$P^M(z) = R^M(z)E^M(z) = cz^{-m_0}I_M \tag{10}$$

と置き換えて考える。

また、ポリフェーズ行列  $E^D(z)$  がパラユニタリ行列であるとき、すなわち、

$$\tilde{E}^D(z)E^D(z) = cI_D \tag{11}$$

を満たすとき、最大間引きの場合と同様に [10]、このフィルタバンクをオーバーサンプルパラユニタリフィルタバンクと定義する。但し、 $c$  は零でない定数である。このとき、シンセサイザのポリフェーズ行列  $R^D(z)$  を

$$R^D(z) = dz^{-K}\tilde{E}^D(z) \tag{12}$$

とおくと、式 (9) を満たす完全再構成フィルタバンクとなる。ここで、 $d$  は零でない定数、 $K$  は正整数である。この  $K$  次の遅延は、 $R^D(z)$  が因果性を満たすために挿入される。

### 3. ポリフェーズ部分行列

ここで、先のポリフェーズ行列の部分行列として、ポリフェーズ部分行列を定義し、それに基づきオーバーサンプルフィルタバンクの完全再構成条件を与える。

#### 3.1 $M = dD$ の場合

はじめに、間引き率  $D$  がチャンネル数  $M$  の整数分の1の場合、すなわち、 $M = dD$  のときを考える。但し、 $d$  は正整数である。

まず、最大間引きフィルタバンクのアナライザポリフェーズ行列  $\mathbf{E}^M(z)$  を  $D$  列ごとに、シンセサイザポリフェーズ行列  $\mathbf{R}^M(z)$  を  $D$  行ごとに部分行列に分割し、それらを  $\mathbf{E}^M(z)$ ,  $\mathbf{R}^M(z)$  のポリフェーズ部分行列とそれぞれ定義する。このとき、そのポリフェーズ部分行列を  $\mathbf{E}_l^{M,D}(z)$ ,  $\mathbf{R}_l^{M,D}(z)$  とすると、式(8)の  $\mathbf{E}^M(z)$ ,  $\mathbf{R}^M(z)$  は、

$$\mathbf{E}^M(z) = [\mathbf{E}_0^{M,D}(z) \cdots \mathbf{E}_{d-1}^{M,D}(z)] \quad (13)$$

$$\mathbf{R}^M(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^{M,D}(z) \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{d-1}^{M,D}(z) \end{bmatrix} \quad (14)$$

と表される。式(9)のポリフェーズ行列積  $\mathbf{P}^D(z) = \mathbf{R}^D(z)\mathbf{E}^D(z)$  は、このような表現を用いて次式のように表現することができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^D(z) &= z^{-(d-1)} \tilde{\mathbf{Z}}_{d,D}(z) \mathbf{R}^M(z^d) \mathbf{E}^M(z^d) \mathbf{Z}_{d,D}(z) \end{aligned} \quad (15)$$

但し、

$$\mathbf{Z}_{d,D}(z) = \begin{bmatrix} z^{-0} \mathbf{I}_D \\ z^{-1} \mathbf{I}_D \\ \vdots \\ z^{-(d-1)} \mathbf{I}_D \end{bmatrix} \quad (16)$$

上式は、後述するように最大間引きフィルタバンクとの関係を考察する際に重要な指針を与える。以下では上式の導出を行う。

最大間引き時のポリフェーズ行列は、式(1), (2)に  $D = M$  を代入することにより、

$$\mathbf{h}(z) = \mathbf{E}^M(z^M) \mathbf{e}_M(z) \quad (17)$$

$$\mathbf{f}^T(z) = z^{-(M-1)} \tilde{\mathbf{e}}_M(z) \mathbf{R}^M(z^M) \quad (18)$$

と与えられる。これを式(13), (14)の部分行列を用いて書き換えると、

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(z) &= [\mathbf{E}_0^{M,D}(z^{dD}) \cdots \mathbf{E}_{d-1}^{M,D}(z^{dD})] \\ &\quad \begin{bmatrix} z^{-0 \cdot D} \mathbf{e}_D(z) \\ z^{-1 \cdot D} \mathbf{e}_D(z) \\ \vdots \\ z^{-(d-1)D} \mathbf{e}_D(z) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{E}^M(z^{dD}) \mathbf{Z}_{d,D}(z^D) \mathbf{e}_D(z) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^T(z) &= z^{-(D-1)} [z^{-(d-1)D} \tilde{\mathbf{e}}_D(z) \cdots z^{-0 \cdot D} \tilde{\mathbf{e}}_D(z)] \\ &\quad \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^{M,D}(z^{dD}) \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{d-1}^{M,D}(z^{dD}) \end{bmatrix} \\ &= z^{-(D-1)} \tilde{\mathbf{e}}_D(z) z^{-(d-1)D} \\ &\quad \cdot \tilde{\mathbf{Z}}_{d,D}(z^D) \mathbf{R}^M(z^{dD}) \end{aligned} \quad (20)$$

となる。式(19), (20)を式(1), (2)と比較すると、

$$\mathbf{E}^D(z) = \mathbf{E}^M(z^d) \mathbf{Z}_{d,D}(z) \quad (21)$$

$$\mathbf{R}^D(z) = z^{-(d-1)} \tilde{\mathbf{Z}}_{d,D}(z) \mathbf{R}^M(z^d) \quad (22)$$

を得る。従って、式(9)の  $\mathbf{P}^D(z)$  は、式(15)と表される。これは、ポリフェーズ行列  $\mathbf{P}^D(z)$  がポリフェーズ部分行列の積和として表現されることを示している(式(41), 式(34)および式(35)参照)。

このとき、式(19)および式(20)より、各チャンネルにおけるアナライザおよびシンセサイザフィルタ  $H_k(z)$  および  $F_k(z)$  は、ポリフェーズ部分行列を用いて次式のように与えられる。

$$H_k(z) = \sum_{p=0}^{d-1} \sum_{l=0}^{D-1} z^{-(pD+l)} \mathbf{E}_{p,k,l}^{M,D}(z^{dD}) \quad (23)$$

$$F_k(z) = \sum_{p=0}^{d-1} \sum_{l=0}^{D-1} z^{-(dD-pD-l-1)} \mathbf{R}_{d-1-p,l,k}^{M,D}(z^{dD}) \quad (24)$$

但し、 $\mathbf{E}_{p,k,l}^{M,D}(z)$  はポリフェーズ部分行列  $\mathbf{E}_p^{M,D}(z)$  の  $(k, l)$  成分である。

#### 3.2 $M \neq dD$ の場合

次に、間引き率  $D$  がチャンネル数  $M$  の整数分の1でない場合を考察する。今、間引き率  $D$  とチャンネル数  $M$  の最小公倍数を  $N$  としよう。すなわち、

$$N = mD = dM \quad (25)$$

とおく。但し、 $m, d$  は互いに素な正整数である。

この整数  $N$  に対し、新たにポリフェーズ行列  $\mathbf{E}^N(z)$ ,  $\mathbf{R}^N(z)$  を生成する。このとき、式 (21), (22) の導出と同様の手順により、 $D$  を基準としたポリフェーズ行列を、 $\mathbf{E}^N(z), \mathbf{R}^N(z)$  のポリフェーズ部分行列  $\mathbf{E}_l^{N,D}(z)$ ,  $\mathbf{R}_l^{N,D}(z)$  に基づき表すことができる。すなわち、

$$\mathbf{E}^D(z) = \mathbf{E}^N(z^d) \mathbf{Z}_{d,D}(z) \quad (26)$$

$$\mathbf{R}^D(z) = z^{-(d-1)} \tilde{\mathbf{Z}}_{d,D}(z) \mathbf{R}^N(z^d) \quad (27)$$

但し、

$$\mathbf{E}^N(z) = [\mathbf{E}_0^{N,D}(z) \cdots \mathbf{E}_{d-1}^{N,D}(z)] \quad (28)$$

$$\mathbf{R}^N(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^{N,D}(z) \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{d-1}^{N,D}(z) \end{bmatrix} \quad (29)$$

である。式 (21), (22) は、それぞれ式 (26), (27) において  $m=1$  とした場合に対応する。

### 3.3 完全再構成条件

式 (9) の完全再構成条件をポリフェーズ部分行列を用いて書き直す。

まず、式 (25) の  $N = mM = dD$  を基準としたポリフェーズ行列  $\mathbf{E}^N(z)$  および  $\mathbf{R}^N(z)$  に対しても次式のように積行列  $\mathbf{P}^N(z)$  を定義する。

$$\mathbf{P}^N(z) = \mathbf{R}^N(z) \mathbf{E}^N(z) \quad (30)$$

また、この行列  $\mathbf{P}^N(z)$  を  $D \times D$  の大きさに分割したポリフェーズ部分行列の積  $\mathbf{P}_{k,l}^{N,D}(z)$  を

$$\mathbf{P}^N(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{0,0}^{N,D}(z) & \cdots & \mathbf{P}_{0,d-1}^{N,D}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{P}_{d-1,0}^{N,D}(z) & \cdots & \mathbf{P}_{d-1,d-1}^{N,D}(z) \end{bmatrix} \quad (31)$$

とする。但し、

$$\mathbf{P}_{k,l}^{N,D}(z) = \mathbf{R}_k^{N,D}(z) \mathbf{E}_l^{N,D}(z) \quad (32)$$

である。

式 (32) の  $\mathbf{P}_{k,l}^{N,D}(z)$  を用いて、オーバサンプルフィルタバンクの完全再構成条件を次式のように導出することができる。

$$\mathbf{S}_p^{N,D}(z) = \begin{cases} cz^{-m_0} \mathbf{I}_D & (p = p_0) \\ \mathbf{0}_D & (p \neq p_0) \end{cases} \quad (33)$$

但し、 $p_0$  は  $0 \leq p \leq d-1$  を満たす任意の整数である。また、

$$\mathbf{S}_0^{N,D}(z) = \sum_{l=0}^{d-1} \mathbf{P}_{l,l}^{N,D}(z) \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_p^{N,D}(z) &= \sum_{l=0}^{d-1-p} \mathbf{P}_{l+p,l}^{N,D}(z) \\ &= +z^{-1} \sum_{l=d-p}^{d-1} \mathbf{P}_{l-d+p,l}^{N,D}(z) \quad (1 \leq p \leq d-1) \end{aligned} \quad (35)$$

である。

以下では、上式の導出を行う。まず、式 (15) に対応する表現を得る。

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^D(z) &= z^{-(d-1)} \tilde{\mathbf{Z}}_{d,D}(z) \mathbf{R}^N(z^d) \mathbf{E}^N(z^d) \mathbf{Z}_{d,D}(z) \end{aligned} \quad (36)$$

次に、上式において、右辺の遅延項を整理する。まず、 $\mathbf{Z}_{d,D}(z)$  に含まれる遅延を  $\mathbf{P}^N(z^d)$  内に移動すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^D(z) &= z^{-(d-1)} \tilde{\mathbf{Z}}_{d,D}(z) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{0,0}^{N,D}(z^d) & z^{-1} \mathbf{P}_{0,1}^{N,D}(z^d) \\ \mathbf{P}_{1,0}^{N,D}(z^d) & z^{-1} \mathbf{P}_{1,1}^{N,D}(z^d) \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{P}_{d-1,0}^{N,D}(z^d) & z^{-1} \mathbf{P}_{d-1,1}^{N,D}(z^d) \\ \cdots & z^{-(d-1)} \mathbf{P}_{0,d-1}^{N,D}(z^d) \\ \cdots & z^{-(d-1)} \mathbf{P}_{1,d-1}^{N,D}(z^d) \\ \vdots & \vdots \\ \cdots & z^{-(d-1)} \mathbf{P}_{d-1,d-1}^{N,D}(z^d) \end{bmatrix} \mathbf{I}_{d,D} \end{aligned} \quad (37)$$

を得る。但し、

$$\mathbf{I}_{d,D} = [\mathbf{I}_D \mathbf{I}_D \cdots \mathbf{I}_D]^T \quad (38)$$

である。ここで、 $\tilde{\mathbf{Z}}_{d,D}(z)$  は遅延量の異なる単位行列が並んだものである。従って、中央の行列  $\mathbf{P}^N(z^d)$  において列方向に部分行列の入替えにより、各部分行列の前にある遅延量を変更することができる。このとき、すべての遅延が  $z^d$  の関数となるように各列に入替えを施すと、式 (36) は、

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^D(z) &= z^{-(d-1)} \tilde{\mathbf{Z}}_{d,D}(z) \mathbf{P}^N(z^d) \mathbf{Z}_{d,D}(z) \\ &= z^{-(d-1)} \tilde{\mathbf{Z}}_{d,D}(z) \mathbf{S}^{N,D}(z^d) \end{aligned} \quad (39)$$

と表現できる。但し、

$$S^{N,D}(z^d) = \begin{bmatrix} P_{0,0}^{N,D}(z^d) & P_{1,1}^{N,D}(z^d) & \cdots \\ P_{1,0}^{N,D}(z^d) & P_{2,1}^{N,D}(z^d) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ P_{d-1,0}^{N,D}(z^d) & z^{-d}P_{0,1}^{N,D}(z^d) & \cdots \\ & P_{d-1,d-1}^{N,D}(z^d) \\ & z^{-d}P_{0,d-1}^{N,D}(z^d) \\ & \vdots \\ & z^{-d}P_{d-1,d-1}^{N,D}(z^d) \end{bmatrix} I_{d,D} \quad (40)$$

である。ここで、 $S^{N,D}(z)$  を  $D$  行ごとに分割した部分行列が、式 (34)、(35) である。故に、式 (39) は、この部分行列  $S_p^{N,D}(z)$  を用いて、

$$P^D(z) = I_{d,D}^T \begin{bmatrix} z^{-(d-1)}S_0^{N,D}(z^d) \\ z^{-(d-2)}S_1^{N,D}(z^d) \\ \vdots \\ z^0S_{d-1}^{N,D}(z^d) \end{bmatrix} \quad (41)$$

と表される。従って、式 (9) の  $P^D(z) = cz^{-m_0}I_D$  が成立するためには、 $P^D(z)$  がある整数  $m_0$  という遅延量を伴う  $S_i^{N,D}(z^d)$  が単位行列  $I_D$  となり、他の  $S_j^{N,D}(z^d), j \neq i$  は、零値をとらなければいけないことがわかる。式 (33) はそのことを表現している。

当然  $N = M$  であつ  $D = M$  のとき、すなわち最大間引きにおいては、 $d = 1$  であり、複数の  $P_{k,l}^{N,D}(z)$  の和ではなく、一つの行列が単位行列となることに注意してほしい。

#### 4. オーバサンプリングフィルタバンクの性質

ここでは、本論文で提案したポリフェーズ部分行列に基づき、オーバーサンプリングフィルタバンクの性質について考察する。

[性質 1] 最大間引きフィルタバンクの伝達関数の利用

まず、オーバーサンプリングフィルタバンクの伝達関数として、最大間引き完全再構成フィルタバンクの伝達関数をそのまま利用する場合を考察する。このとき、このフィルタバンクがオーバーサンプリングときにも完全再構成条件を満足するための条件を示す。結論は、間引き率  $D$  がチャンネル数  $M$  の整数分の 1、すなわち、 $M = dD(d:正整数)$  を満たすときに、完全再構成フィルタバンクの伝達関数は、オーバーサンプリングな使用においても完全再構成を保証する。これは、次のように説明される。

式 (10) が成立するフィルタバンクは、 $N = M$  の下で、式 (31) の部分行列  $P_{k,l}^{M,D}(z)$  として、

$$P_{k,k}^{M,D}(z) = I_D \quad (k = 0, 1, \dots, d-1) \quad (42)$$

$$P_{k,l}^{M,D}(z) = \mathbf{o}_D \quad (k \neq l) \quad (43)$$

をもつ。これを式 (40) に代入すると、

$$S^{M,D}(z) = cz^{-m_0} \begin{bmatrix} I_D & I_D & \cdots & I_D \\ \mathbf{o}_D & \mathbf{o}_D & \cdots & \mathbf{o}_D \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{o}_D & \mathbf{o}_D & \cdots & \mathbf{o}_D \end{bmatrix} I_{d,D} \quad (44a)$$

$$= dcz^{-m_0} \begin{bmatrix} I_D \\ \mathbf{o}_D \\ \vdots \\ \mathbf{o}_D \end{bmatrix} \quad (44b)$$

を得る。これは、式 (33) を満たし、このフィルタバンクは間引き率  $D$  においても完全再構成条件を満たすことがわかる。

逆に、 $M \neq dD$  となる間引き率  $D$  のフィルタバンクに対しては、完全再構成を保証することはできない。ここでは、このことを簡単な例を用いて示しておく。

議論を簡単にするために、式 (10) で  $m_0 = 0$  の場合を考える。この条件は、各プロトタイプフィルタのタップ数を  $M$  とすることに相当する。

今、チャンネル数  $M$  を、間引き率  $D$  と負でない整数  $p, q$  を用いて

$$M = pD + q \quad (q \neq 0) \quad (45)$$

と表記する。このとき、式 (31) の部分行列  $P_{k,l}^{N,D}(z)$  は、

$$P_{k,k}^{N,D}(z) = \begin{cases} cI_D, & (0 \leq k < p) \\ c \begin{bmatrix} I_q & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{o}_{D-q} \end{bmatrix}, & (k = p) \\ \mathbf{o}_D, & (p < k < d) \end{cases} \quad (46)$$

$$P_{k,l}^{N,D}(z) = \mathbf{o}_D \quad (k \neq l) \quad (47)$$

となる。但し、 $\mathbf{o}_k$  は  $k \times k$  の大きさの零行列である。

これを式 (40) に代入すると、

$$S^{M,D}(z) = c \begin{bmatrix} pI_D + \begin{bmatrix} I_q & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{o}_{D-q} \end{bmatrix} \\ \mathbf{o}_D \\ \vdots \\ \mathbf{o}_D \end{bmatrix} \quad (48)$$

を得る。今、 $q \neq 0$  であるので、最大間引きで完全再構成するフィルタバンクは、 $M \neq dD$  となるレート  $D$  の下では、式 (33) の完全再構成条件を満たすことが保証されない。

[性質 2] 性質 1 における演算量の低減

最大間引きフィルタバンクの伝達関数を直接利用しなくても、オーバサンプルフィルタバンクが完全再構成を保証できることを述べる。具体的には、アナライザを直接利用すると、シンセサイザの演算量を  $1/d$  にすることができる。

$M = dD$  のもとで、式 (44a) の表現は多くの冗長性を含んでいる。例えば、式 (44a) において最低 1 個の単位行列  $I_D$  があれば、他の  $I_D$  が零行列であっても、利得以外は式 (44b) と一致する。

今、式 (44) において、部分行列  $P_{k,l}^{M,D}(z)$  が  $P_{0,0}^{M,D}(z)$  のみ単位行列  $I_D$  となり、他は零となることを考える。このとき、対応するシンセサイザフィルタは式 (20) から、

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^T(z) &= z^{-(M-1)} \mathbf{e}_M(z) \begin{bmatrix} R_0^{M,D}(z^M) \\ \mathbf{o} \\ \vdots \\ \mathbf{o} \end{bmatrix} \\ &= z^{-(M-1)} \mathbf{e}_D(z) R_0^{M,D}(z^{dD}) \end{aligned} \quad (49)$$

と、一つのポリフェーズ部分行列を残し、残りの  $d-1$  個を零と置いたものに対応する。このフィルタは完全再構成条件を満たす。更に、最大間引きフィルタバンクのシンセサイザに比べ、 $1/d$  の演算量しかその実現において必要としない。

以上の議論は単位行列を 1 個とする場合に限らず、複数個の残す場合に拡張することができることは容易に理解できる。

[性質 3] 設計の自由度

式 (33) のように  $d$  個の部分行列  $P_{k,l}^{N,D}(z)$  の和が単位行列となるためには、必ずしも各  $P_{k,l}^{N,D}(z)$  は単位行列である必要はない。部分行列  $P_{k,l}^{N,D}(z)$  が単位行

列でない場合でも、和が単位行列となる部分行列は多数存在する。この自由度を利用することにより、シンセサイザフィルタの特性を改善することが可能となる。

この自由度が、特性の改善や、5. の完全再構成 FIR DFT フィルタバンクを与える。

[性質 4] 低遅延フィルタバンク

因果性を満たすフィルタバンクの遅延量を最小にするための設計条件を与える。これは、式 (9) のポリフェーズ行列の積行列  $P^D(z)$  を

$$P^D(z) = I_D \quad (50)$$

と設計することにより、バンク全体の遅延量を  $D-1$  とするものである。もし、各チャネルフィルタがすべて因果性を満たすものと仮定すると、式 (41) において遅延項は、 $m_0 = 0$  となる必要がある。このことから、フィルタバンクに課せられる条件は、次式のように容易に導ける。

$$S_{d-1}^{N,D}(z) = I_D \quad (51)$$

$$S_p^{N,D}(z) = \mathbf{o}_D \quad (0 \leq p \leq d-2) \quad (52)$$

ここで、式 (35) から、 $S_{d-1}^{N,D}(z)$  は、

$$S_{d-1}^{N,D}(z) = P_{d-1,0}^{N,D}(z) + z^{-1} \sum_{l=1}^{d-1} P_{l+1,l}^{N,D}(z) = I_D \quad (53)$$

が成立しなければならぬ。このような低遅延に関する議論は、黒沢らによっても行われている [8]。本論文では、ポリフェーズ表現を用いてそれを定式化したと言える。

### 5. オーバサンプル DFT フィルタバンク

4. で述べたオーバサンプルフィルタバンクの表現を、DFT(Discrete Fourier Transform) フィルタバンクに拡張する。

#### 5.1 DFT フィルタバンク

DFT フィルタバンクは、各チャネルのアナライザシンセサイザフィルタを

$$H_k(z) = H_0(zW_M^k) \quad (54)$$

$$F_k(z) = W_M^{-k} F_0(zW_M^k) \quad (55)$$

のように、プロトタイプフィルタ  $H_0(z), F_0(z)$  の変調によって与えるフィルタバンクである。ここで、

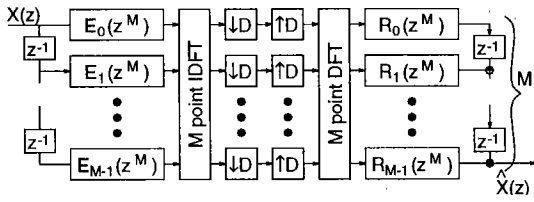


図2 DFT フィルタバンク  
Fig.2 A DFT filter bank.

$W_M = \exp(2\pi/M)$  である。このとき、全体の構成は図2に示すように、1組のIDFTとDFT、およびプロトタイプフィルタのポリフェーズ要素により構成することができる。

まず、間引き率  $D$  がチャンネル数  $M$  と等しい最大間引きDFTフィルタバンクを考える。式(8)のアナライザおよびシンセサイザポリフェーズ行列  $E^M(z)$ ,  $R^M(z)$  は、プロトタイプフィルタを  $M$  段にポリフェーズ分割したフィルタ  $E_k^M(z)$ ,  $R_k^M(z)$  を用いて、

$$E^M(z) = W_M^* \text{diag}(E_0^M(z), \dots, E_{M-1}^M(z)) \quad (56)$$

$$R^M(z) = \text{diag}(R_0^M(z), \dots, R_{M-1}^M(z)) W_M \quad (57)$$

と表される[10]。但し、 $\text{diag}(x_0, \dots, x_{M-1})$  は行列の対角要素が  $x_0, \dots, x_{M-1}$  である  $M \times M$  の対角行列であり、 $W_M$  は  $M \times M$  のDFT行列である。また、上付きの  $*$  は行列要素の複素共役をとることを示す。

このとき、式(9)の  $P^M(z)$  は、式(56)および式(57)より

$$P^M(z) = \text{diag}(R_k^M(z)) W_M W_M^* \text{diag}(E_k^M(z)) \\ = \text{diag}(R_k^M(z) E_k^M(z)) \quad (58)$$

となる。これを式(9)と比較すると、最大間引きDFTフィルタバンクの完全再構成条件は、

$$R_k^M(z) E_k^M(z) = cz^{-m_0} \quad (k = 0, 1, \dots, M-1) \quad (59)$$

となる。但し、 $c$  は零でない定数、 $m_0$  は整数である。

### 5.2 完全再構成条件

次に、間引き率が  $D$  であるDFTフィルタバンクを考えよう。通常のフィルタバンク同様、 $N = mM = dD$  とすると、式(30)の  $R^N(z)$  および  $E^N(z)$  は、

$$E^N(z) = W_M^* \begin{bmatrix} E_0^{N,M}(z) & \dots & E_{m-1}^{N,M}(z) \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$R^N(z) = \begin{bmatrix} R_0^{N,M}(z) \\ \vdots \\ R_{m-1}^{N,M}(z) \end{bmatrix} W_M \quad (61)$$

と表される。但し、 $E_l^{N,M}(z)$  および  $R_l^{N,M}(z)$  は、

$$E_l^{N,M}(z) = \text{diag}(E_{lM+0}^N(z), E_{lM+1}^N(z), \dots, E_{lM+(M-1)}^N(z)) \quad (62)$$

$$R_k^{N,M}(z) = \text{diag}(R_{kM+0}^N(z), R_{kM+1}^N(z), \dots, R_{kM+(M-1)}^N(z)) \quad (63)$$

で示されるポリフェーズフィルタを要素にもつ対角行列である。ここで、ポリフェーズ行列積  $P^N(z)$  は、式(58)と同様に、DFT行列部は打ち消し合う。従って、この積行列  $P^N(z)$  の  $M$  を基準とした部分行列  $P_{k,l}^{N,M}(z)$  も、

$$P_{k,l}^{N,M}(z) = R_k^{N,M}(z) E_l^{N,M}(z) \\ = \text{diag}(P_{kM+0, lM+0}^N(z), \dots, P_{kM+1, lM+1}^N(z), \dots, P_{kM+(M-1), lM+(M-1)}^N(z)) \quad (64)$$

となり対角行列となる。但し、 $P_{k,l}^N(z)$  は

$$P_{k,l}^N(z) = R_k^N(z) E_l^N(z) \quad (65)$$

で示されるポリフェーズフィルタ積である。すなわち、 $P^N(z)$  は  $m \times m$  個の対角行列が並んだものとなる。

この行列  $P^N(z)$  に対し、式(31)と同様に  $D$  を基準としたポリフェーズ部分行列  $P_{k,l}^{N,D}(z)$  を考えよう。これは、上記の積行列  $P^N(z)$  を  $D \times D$  の大きさの部分行列に分けたものである。ここで、 $M$  と  $D$  は互いに素であるため、部分行列  $P_{k,l}^{N,D}(z)$  は  $k \neq l$  の場合には対角部分に要素をもたない。従って、式(41)の  $S_p^{N,D}(z)$  のうち単位行列になることができるのは、 $P_{k,k}^{N,D}(z)$  を含む  $S_0^{N,D}(z)$  だけである。従って、オーバーサンプルDFTフィルタバンクの完全再構成条件は、式(33)において  $p_0 = 0$  とした場合、すなわち、

$$S_0^{N,D}(z) = cz^{-m_0} I_D \quad (66)$$

$$S_p^{N,D}(z) = \mathbf{0}_D \quad (1 \leq p \leq d-1) \quad (67)$$

となる。これを、式(65)のポリフェーズフィルタ積

$P_{k,l}^N(z)$  を用いて表すと、

$$\sum_{l=0}^{d-1} P_{lD+k, lD+k}^N(z) = cz^{-m_0} \quad (68)$$

$$\sum_{l=0}^{d-1} z^{-\alpha(lD+pM+k)} P_{lD+pM+k, lD+k}^N(z) = 0 \quad (69)$$

$$(k = 0, 1, \dots, D-1, p = 1, \dots, m-1)$$

但し、

$$a(x) = \begin{cases} 0 & (x < N) \\ M & (x \geq N) \end{cases} \quad (70)$$

と表現できる。

特に、 $M = dD$  の場合には、 $N = M$  となり、 $P^N(z)$  は式 (58) の  $P^M(z)$  と等しくなる。このとき、この行列は対角行列であるので、 $P_{k,k}^{N,D}(z)$  以外の行列は零行列となる。すなわち、

$$P_{k,l}^{N,D}(z) = \mathbf{0}_D \quad (k \neq l) \quad (71)$$

となり、式 (69) は自動的に満たされ、式 (68) のみが完全再構成条件となる。式 (68) および式 (69) を、式 (59) と比較する。式 (59) は単なるポリフェーズ行列の積であり、これを満たす FIR フィルタは存在しないことが知られている（フィルタのタップ数と分割数が等しい場合を除き）。一方、式 (68) および式 (69) は、和である。この条件は、FIR パラユニタリフィルタ解をもつことで知られるコサイン変調フィルタバンクと同じである [15]。従って、FIR フィルタの解はあり、パラユニタリで設計することもできる。

### 6. 例 題

ここでは、5. で述べた DFT フィルタバンクの設計例を通して、本方法の有効性を示す。

[例 1] チャネル数  $M$  とフィルタのタップ数  $L$  を等しく 16 と置き、間引き率  $D$  を 4 とした。また、アナライザプロトタイプフィルタ  $H_0(z)$  は阻止域端周波数が  $\pi/4$  となるように *remez* アルゴリズムを用いて設計した (図 3 (a) 参照)。このアナライザフィルタ  $H_0(z)$  に対して、完全再構成条件を満足するシンセサイザプロトタイプフィルタ  $F_0(z)$  を設計することを考える。

いくつかの方法が考えられるが、その一つは性質 1 で述べたように、完全再構成フィルタバンクを設計す

ることである。 $M \div L$  から、各ポリフェーズ要素はフィルタの係数に対応する単なる定数に一意に決まる。従って、式 (59) の条件から、シンセサイザフィルタは、

$$E_k^M(z) = h_0(k) \quad (72)$$

$$R_k^M(z) = f_0(M-1-k) = 1/h_0(k) \quad (73)$$

と示される。但し、 $h_0(k)$ 、 $f_0(k)$  は、各プロトタイプフィルタ  $H_0(z)$ 、 $F_0(z)$  のインパルス応答である。このシンセサイザフィルタ  $F_0(z)$  の振幅応答を図 3 (b) に示す。

次に性質 2 に着目する。式 (73) において最後の  $D$  個のポリフェーズ成分のみが値をもつとき、すなわち、

$$R_{k0}^M(z) = \begin{cases} 0 & (0 \leq k \leq M-D-1) \\ 1/h_0(k) & (M-D \leq k \leq M-1) \end{cases} \quad (74)$$

のときにも完全再構成を保証できる。このとき、シンセサイザプロトタイプフィルタは、

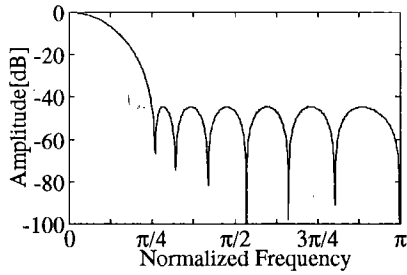
$$F_0'(z) = \sum_{n=0}^{D-1} f_0(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{D-1} \frac{1}{h_0(M-1-n)} z^{-n} \quad (75)$$

と表記できる。この振幅応答を図 3 (c) に示す。これにより、シンセサイザにおける乗算処理は  $M/d = 4$  個に減少する。また、DFT 出力も一部しか使用してないことから、DFT 部の演算量も更に低減させることが可能となる。

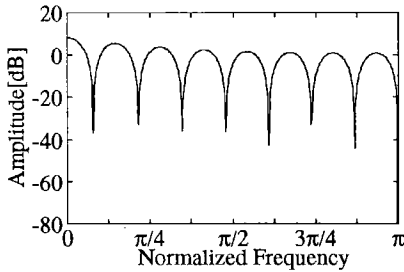
第 3 の方法として、式 (68)、(69) のオーバサンプル DFT フィルタの完全再構成条件から、直接シンセサイザを設計する。最大間引きの設計条件は、完全再構成解は一つしか存在しないが、ここでは複数解が存在する。これは、設計の自由度を特性の改善に利用したと考えられる (性質 3)。図 3 (d) に設計例を示す。サブバンド適応フィルタにフィルタバンクを応用する場合、完全再構成条件のみならず、アナライザとシンセサイザともにこのように十分な阻止域減衰量をもつことが求められる。

[例 2] また、 $M \neq dD$  の場合の例として、間引き率  $D = 5$  とした場合を考えよう。ここで、前述のように  $L = M$  とおくと、プロトタイプフィルタが  $M-1$  次以上の係数をもたないため、式 (62)、(63) の

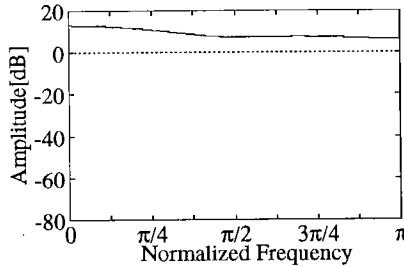




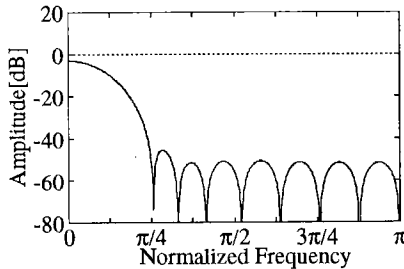
(a)  $H_0(z)$



(b)  $F_0(z)$  ( $f_0(n) = 1/h_0(M-1-n)$ )



(c)  $F_0(z)$  (Calculation reduction)



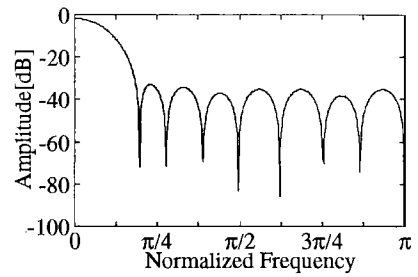
(d)  $F_0(z)$  (Designed under 式 (31))

図3 DFT フィルタバンクのプロトタイプフィルタの振幅特性 ( $M = 16, D = 4, L = 16$ )

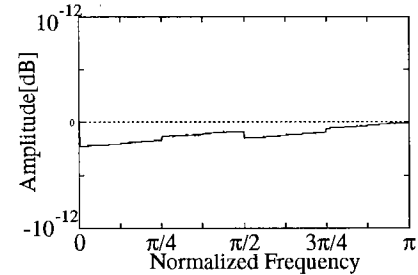
Fig. 3 Amplitude responses of prototype filters for DFT filter banks. ( $M = 16, D = 4, L = 16$ )

$E_l^{N,M}(z), R_k^{N,M}(z)$  は、

$$E_l^{N,M}(z) = \mathbf{o} \quad (l = 1, 2, \dots, m-1) \quad (76)$$



(a)  $F_0(z)$



(b) Amplitude Responses of Filter Banks

図4  $M \neq dD$  の場合 ( $M = 16, D = 5, L = 16$ )  
Fig. 4 Case of  $M \neq dD$ . ( $M = 16, D = 5, L = 16$ )

$$R_k^{N,M}(z) = \mathbf{o} \quad (k = 1, 2, \dots, m-1) \quad (77)$$

となり、式 (69) は自動的に満たされる。従って、設計条件は式 (68) のみとなる。ここで、 $M = dD$  の場合同様、阻止域減衰量が  $\pi/5$  のアナライザフィルタを設計する。このとき、式 (68) の下で設計したシンセサイザフィルタの振幅特性を図 4 (a) に示す。図 4 (b) は、このフィルタバンク全体の振幅応答を示している。システムが完全再構成条件を満たしているため、振幅応答がオールパスになっていることがわかる。

[例 3] もう一つの例として、パラユニタリの条件を付加したフィルタバンクを設計しよう。 $M = dD$  を満たす DFT フィルタバンクの場合、式 (68) は式 (12) より、

$$\sum_{l=0}^{d-1} \tilde{E}_{lD+k}^N(z) E_{lD+k}^N(z) = c \quad (k = 0, 1, \dots, D-1) \quad (78)$$

となる。前述のとおりオーバーサンプルフィルタバンクの場合には、長いタップ長のフィルタを使用した FIR 解が存在する。チャンネル数  $M = 16$ 、間引き率  $D = 4$ 、フィルタのタップ数  $L = 32$  のもとで、式 (78) を満た

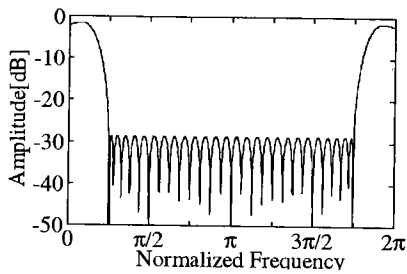


図5 パラユニタリ条件の下での設計したプロトタイプフィルタの振幅特性 ( $M = 16, D = 4, L = 32$ )

Fig.5 Amplitude response of prototype filters designed under paraunitary condition. ( $M = 16, D = 4, L = 32$ )

すように設計されたプロトタイプフィルタの振幅特性を図5に示す。

## 7. むすび

本論文では、ポリフェーズ部分行列を定義し、オーバサンプルフィルタバンクの性質を検討した。この表現に基づき、最大間引きフィルタバンクとの関係を考察し、オーバサンプルフィルタバンクがもつ設計の自由度について表現した。この自由度を利用することにより、演算量や遅延量を低減したフィルタバンクの構成が実現できることを示した。また、以上の議論をDFTフィルタバンクに拡張した。このとき、最大間引き時には実現できない完全再構成FIR DFTフィルタバンクが設計できることを確認した。

今後は、低遅延フィルタバンクの具体的設計法や種々のパラユニタリオーバサンプルフィルタバンクの設計法の開発を予定している。

## 文 献

- [1] J.W. Woods, "Subband Coding of Images," Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [2] A.N. Akansu and R.A. Haddad, "Multiresolution Signal Decomposition," Academic Press Inc. 1992.
- [3] H. Perez and F. Amamo, "Acoustic echo cancellation using multirate techniques," IEICE Trans, vol.E74, no.11, pp.3359-3558, Nov. 1991.
- [4] 貴家仁志, 山崎広達, 芦原浩司, "有理数間引きをもつオーバサンプリングサブバンド適応フィルタ," 信学論 (A), vol.J77-A, no.8, pp.1129-1136, Aug. 1994.
- [5] Y.P. Lin and P.P. Vaidyanathan, "Application of DFT filter banks and cosine modulated filter banks in filtering," IEEE Asia-Pacific Conference on Circuits and Systems 6C.7, pp.254-259, Dec. 1994.
- [6] 小林弘幸, 貴家仁志, "低クロックレートで動作するディジタルフィルタ," 信学 '95 総大, A-181, March 1995.

- [7] M. Vetterli, "Perfect transmultiplexers," IEEE, vol. ICASSP-86, pp.2567-2570, April 1986.
- [8] 黒沢 馨, 藤田洋一, "不等間隔 QMF システムの構成," 信学論 (A), vol.J72-A, no.10, pp.1510-1518, Oct. 1989.
- [9] K. Kurosawa, I. Yamada, K. Kawabe, and S. Tsuji, "Over sampled perfect reconstruction QMF banks," IEEE, vol.ISPACS-93, pp.257-262, Oct. 1993.
- [10] P.P. Vaidyanathan, "Multirate Systems and Filter Banks," Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.
- [11] M. Vetterli, "A theory of multirate filter banks," IEEE Trans. on ASSP, vol.35, no.3, March 1987.
- [12] Z. Cvetković, "Oversampled modulated filter banks and tight gabor frames in  $\ell^2(\mathcal{Z})$ ," IEEE, vol.ICASSP-95, no.2, pp.1456-1459, May 1995.
- [13] 小林弘幸, 貴家仁志, "非最大間引きフィルタバンクの完全再構成条件," 信学技報, DSP95-16, May 1995.
- [14] 貴家仁志, "マルチレート信号処理," 昭晃堂, Oct. 1995.
- [15] R.D. Koilpillai and P.P. Vaidyanathan, "Cosine-modulated FIR filter banks satisfying perfect reconstruction," IEEE Trans. on Signal Processing, vol.40, no.4, pp.770-783, April 1992.
- [16] 小林弘幸, 貴家仁志, "低遅延 DFT フィルタバンクの一設計法," '96 信学総大, A-204, March 1996.
- [17] 小林弘幸, 貴家仁志, "最小遅延量をもつオーバサンプル DFT フィルタバンクの設計," 信学論 (A), vol.J79-A, no.11, 1996.
- [18] 梶田邦之, 小林弘幸, 村松正吾, 山田昭彦, 貴家仁志, "Householder 分解を用いたオーバサンプルパラユニタリ DFT フィルタバンクの一設計法," 信学技報, DSP95-133, Dec. 1995.

(平成7年11月27日受付, 8年4月12日再受付)



貴家 仁志 (正員)

1980 長岡技科大・工・電気電子システム卒。1982 同大学院修士課程了。同年東京都立大工学部電気工学科助手。現在、同大電子・情報工学科助教授。1995年10月～1996年3月シドニー大 (オーストラリア) 客員研究員。工博。マルチレート信号処理、適応信号処理および画像処理に関する研究に従事。著書「高速フーリエ変換とその応用」、「ディジタル信号処理技術入門」、「マルチレート信号処理」。電子画像学会、テレビジョン学会、IEEE 各会員。



小林 弘幸 (学生員)

1992 東京都立大・工・電気卒。1994 同大学院修士課程了。現在、同大学院博士課程在学中。マルチレート信号処理に関する研究に従事。