

連続時間領域におけるチェス盤ひずみの回避条件

村上 雅治[†] 貴家 仁志[†]

Conditions for Avoiding the Checkerboard Distortion in Continuous-Time Domain

Masaharu MURAKAMI[†] and Hitoshi KIYA[†]

あらまし チェス盤ひずみはデジタルフィルタを用いたサンプリングレート変換器において発生するひずみとして知られている。本論文では、このチェス盤ひずみを連続時間領域において考察する。連続補間関数による補間の問題においてチェス盤ひずみを新たに定義し、チェス盤ひずみ発生を回避する条件を導出する。更に、本論文の条件を満たす連続補間関数に適切なサンプリングを施すことによって、チェス盤ひずみを発生しないデジタルフィルタが生成可能なこと、及び時間スケール変換された連続補間関数とチェス盤ひずみの関係についても考察する。

キーワード 補間関数, チェス盤ひずみ, サンプリングレート変換, フィルタ

1. ま え が き

サンプリングレート変換の技術は、A-D, D-A 変換、画像の解像度変換、フィルタバンクやウェーブレットなどに広く応用されている [1], [2]。このサンプリングレート変換器は、インタポレータとデシメータによって構成される。このシステムは時変であり、このうちインタポレータの周期的時変性が起因してチェス盤ひずみが発生することがある。本論文では、このチェス盤ひずみ回避の問題を連続時間領域において考える。

チェス盤ひずみに関する研究は既に進められ、いくつかの定理が導かれている [2]~[8]。この研究は、まず 1 次元のサンプリングレート変換器に端を発生 [2]~[4]、1 次元のフィルタバンク [2], [5], [6]、多次元のサンプリングレート変換とフィルタバンクに拡張されている [7], [8]。しかしながら、これらの研究はすべて離散時間におけるもので、チェス盤ひずみを回避可能なデジタルフィルタを中心にしたものである。本論文では、連続補間関数によって離散時間信号から連続時間信号を生成することを考える。この処理は任意の補間率に対する補間と考えることができる。デジタルフィルタを用いたレート変換器では、デジタルフィルタを、レート変換率ごとに設計する必要がある。ま

た、補間に用いる点数や、補間率が大きくなると、極めて高次のフィルタが必要となり、そのフィルタの設計は容易ではない。一方、連続補間関数による補間は、補間率によらず一定の関数を使用でき、この問題を回避できる。また、窓関数などの既に知られている種々の関数を利用することも可能となる。しかし、連続時間領域の処理においてもチェス盤ひずみは発生するが、その研究は行われていない。

このような背景を踏まえて、本論文では連続時間領域におけるチェス盤ひずみ回避条件について考察する。まず連続時間領域におけるチェス盤ひずみを定義する。次にそのチェス盤ひずみが発生しないための必要十分条件を導く。また、この条件を満たした連続補間関数に適切なサンプリングを施すことによって、チェス盤ひずみが発生しないデジタルフィルタを生成できること、時間スケール変換がチェス盤ひずみ回避に重要な役割を果たすことを示す。最後に、実際に B-スプライン関数と、連続な窓関数に関してチェス盤ひずみの有無を考察し、本論文で示した条件の有効性を確認する。

2. 離散時間領域におけるチェス盤ひずみ

まず、準備としてデジタルフィルタを用いた場合のチェス盤ひずみの回避条件を要約する [2]~[6]。

図 1 にサンプリングレートを U/D 倍 (U, D : 正整数) にするレート変換器の原理図を示す [1]。ここで、

[†] 東京都立大学大学院工学研究科電気工学専攻, 八王子市
Department of Electrical Eng., Graduate School of Eng.,
Tokyo Metropolitan Univ., 1-1 Minami-ohsawa, Hachioji-shi,
192-0397 Japan

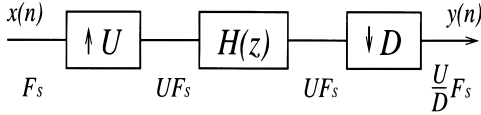


図1 サンプリングレート変換器
Fig.1 Sampling-rate conversion.

上向き矢印 U は原信号の間に $U - 1$ 個の零値を挿入するアップサンプラ, 下向き矢印 D は D 間隔の信号値以外を間引くダウンサンプラ, $H(z)$ は線形時不変なデジタルフィルタである. このサンプリングレート変換器は一般に時不変システムとはならない. そのため, ステップ信号 $x(n) = u(n)$ を加えた場合の応答 $y(n)$ (ステップ応答) は, n が十分大きい場合でも一定値とはならず周期的となる. この周期的時変性に起因してチェス盤ひずみは発生する.

このチェス盤ひずみ及びその回避条件は $H(z)$ のポリフェーズ分解により説明される. 今, フィルタ $H(z)$ を分割数 U でタイプ II のポリフェーズ分解を施すと,

$$H(z) = \sum_{i=0}^{U-1} R_i(z^U)z^{-(U-1-i)} \quad (1)$$

ただし,

$$R_i(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(Um + U - 1 - i)z^{-m} \quad (2)$$

となる. ここで, $h(n)$ は $H(z)$ のインパルス応答である.

このとき, ステップ応答の定常値状態では, 各ポリフェーズフィルタの直流利得 $R_i(1)$ を周期 U で周期的に繰り返す応答となる.

ここで, この周期性はダウンサンプラの間引き率 D に関係なく, アップサンプラの補間率 U のみによって決定されることに注意してほしい. したがって, チェス盤ひずみの回避条件は, 各ポリフェーズフィルタの直流利得が一致する, すなわち,

$$R_0(1) = R_1(1) = \dots = R_{U-1}(1) \quad (3)$$

となる. 式 (3) の条件を, 必要十分な関係として $H(z)$ の零点配置から説明することもできる [4].

[定理 1] 式 (3) を満たすための必要十分条件は, フィルタ $H(z)$ が, $z = e^{j\frac{2\pi m}{U}}, m = 1, 2, \dots, U - 1$ に零点をもつことである.

この定理は $H(z)$ が次のように因数分解できることと等価である.

$$H(z) = (1 + z^{-1} + \dots + z^{-(U-1)})G(z) \quad (4)$$

ここで, $G(z)$ は任意の線形時不変なフィルタである.

3. 連続時間領域におけるチェス盤ひずみ

ここでは, 連続時間領域におけるチェス盤ひずみを定義し, その回避条件を考察する.

3.1 連続時間におけるチェス盤ひずみの定義

離散信号 $x(n)$ から連続時間信号 $y(t)$ を生成することを考える. この $y(t)$ は次式により生成されると仮定する.

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_c(t - k) \quad (5)$$

ここで, $h_c(t)$ を連続補間関数と呼ぶ. 以降の議論を簡潔にするために, $h_c(t)$ は, $0 \leq t < L$ 以外では零値と仮定する. また, この L を連続補間関数の長さとして定義する.

式 (5) の処理は, 任意の補間率に対する補間と解釈することもできる. また, その際, 補間率によらず一定の $h_c(t)$ を使用することができる. 一方, 2. で述べたデジタルフィルタによるレート変換は, 補間率ごとにデジタルフィルタを設計する必要がある. 一般に N 個の原信号を用いて補間率 U で補間する場合, UN 個のインパルス応答をもつフィルタが必要となる. したがって, U 又は N が大きい場合, その設計は困難となる. 式 (5) の使用は任意の補間率に対する補間を実現できるため, 長さ N の $h_c(t)$ より任意の補間率のデジタルフィルタを生成できると考えることができる. また窓関数など既に知られている種々の連続関数を直接利用できるという特徴をもつ.

しかし, この連続補間においてもチェス盤ひずみの発生に注意しなければならない. 今, 連続時間信号 $x_c(t)$ と $h_c(t)$ の畳込み,

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_c(p)h_c(t - p)dp \\ &= x_c(t) * h_c(t) \end{aligned} \quad (6)$$

を考える. 式 (6) の $*$ は畳込み演算の略記表現である. また, デルタ関数 $\delta(t)$ を用いて, 信号

$$\begin{aligned} \delta_T(t) &= \delta(t) + \delta(t - 1) + \delta(t - 2) + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n) \end{aligned} \quad (7)$$

を定義する．この信号をステップインパルス信号と呼ぶ．ここで，時間間隔 1 の選択は，式 (5) との関係性を考慮し，時間間隔を正規化したことに相当する．

式 (7) を式 (6) に代入して応答 (ステップインパルス応答) $y_d(t)$ を求めると，

$$\begin{aligned} y_d(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(p) h_c(t-p) dp \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \delta(p-n) h_c(t-p) dp \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(p-n) h_c(t-p) dp \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} h_c(t-n) \end{aligned} \quad (8)$$

と与えられる．

この結果は， $y_d(t)$ が図 2 のように $h_c(t)$ を時間移動して足し合わせたものになっていることを意味する．

以上の表現より，連続時間領域におけるチェス盤ひずみを次のように定義する．

[定義 1] 連続時間領域において，ステップインパルス応答 $y_d(t)$ の定常値が周期的に振動することをチェス盤ひずみと定義する．

3.2 チェス盤ひずみ回避条件

ここでは，定義 1 のチェス盤ひずみを回避可能な $h_c(t)$ の条件を導く．連続時間領域におけるチェス盤ひずみ回避の条件として，連続補間関数 $h_c(t)$ に対する次の定理が成立する．

[定理 2] チェス盤ひずみ回避の必要十分条件は，次の式が成り立つことである．

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_c(p+n) = K, \quad 0 \leq p < 1 \quad (9)$$

ただし， K は定数である．

(証明) 式 (8) より自明である．

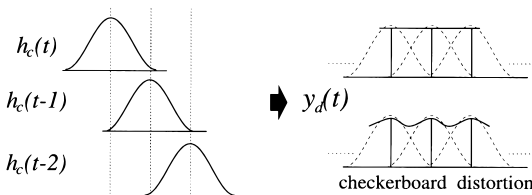


図 2 補間関数の畳込みの様子

Fig. 2 Convolution of interpolation functions.

また，次の定理を導くことができる．

[定理 3] 連続時間領域でのチェス盤ひずみ回避の必要十分条件は，連続補間関数 $h_c(t)$ のラプラス変換 $H(s)$ が，

$$H(s) = \left(\frac{1 - e^{-s}}{s} \right) \times G(s) \quad (10)$$

のように因数分解されることである．ただし， $G(s)$ の逆ラプラス変換 $g(t)$ は，絶対積分可能とする．

定理 3 より次の補助定理が更に成立する．

[補助定理 1] 連続時間領域でのチェス盤ひずみ回避の必要十分条件は， $H(s)$ が次のような零点をもつことである．

$$H(s)|_{s=j2\pi k} = 0, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (11)$$

ただし， $H(s)$ の逆ラプラス変換 $h_c(t)$ は絶対積分可能とする．

(補助定理 1 の証明) まず，補助定理 1 から証明する．

式 (10) の因子は $s = j\omega$ を代入すると，次のように整理される．

$$\begin{aligned} \frac{1 - e^{-j\omega}}{j\omega} &= \frac{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}}{j\omega} e^{-j\omega/2} \\ &= \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} e^{-j\omega/2} \end{aligned} \quad (12)$$

式 (12) は， $\omega = 2\pi k, k = \pm 1, \pm 2, \dots$ において零値となるので，補助定理 1 は定理 3 に対して必要条件となる．また，式 (12) は ω で微分可能であるので，テイラー級数展開できる．ゆえに，零点と多項式の一意性から式 (11) は定理 3 の十分条件となる．

(定理 3 の証明) 次に，定理 3 が必要十分条件であることを証明する．

A. 十分条件の証明

式 (7) の $del(t)$ のラプラス変換 $D(s)$ は，

$$\begin{aligned} D(s) &= 1 + e^{-s} + e^{-2s} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-ns} \end{aligned} \quad (13)$$

となる．また等比級数の和を考えると，

$$D(s) = \frac{1}{1 - e^{-s}} \quad (14)$$

と整理される．ゆえに，式 (10) が成立するとすれば， $y_d(t)$ のラプラス変換 $Y_d(s)$ は次のようになる．

$$Y_d(s) = H(s) \times D(s)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1 - e^{-s}}{s} G(s) \times \frac{1}{1 - e^{-s}} \\
 &= \frac{1}{s} \times G(s) \quad (15)
 \end{aligned}$$

この結果を逆ラプラス変換すると

$$y_d(t) = u(t) * g(t) \quad (16)$$

となる。\$u(t)\$ はユニットステップ信号である。\$g(t)\$ は絶対積分可能な関数なので、\$y_d(t)\$ の定常値は \$g(t)\$ の面積で一定値になる。これよりチェス盤ひずみを起こさない。よって、十分条件である。

B. 必要条件の証明

次に必要条件であることを証明する。まず、式 (7) の \$del(t)\$ を \$p\$ だけ時間シフトした、\$del(t-p)\$ を考える。ただし、\$0 \le p < 1\$ である。この \$del(t-p)\$ により、次のような \$h_p(t)\$ を定義する。

$$h_p(t) = h_c(t)del(t-p) \quad (17)$$

この式を用いて、\$h_c(t)\$ を次のように表現できる。

$$h_c(t) = \int_0^1 h_p(t) dp \quad (18)$$

したがって、\$h_c(t)\$ のラプラス変換 \$H(s)\$ は、

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \int_0^\infty h_c(t)e^{-st} dt \\
 &= \int_0^\infty \int_0^1 h_p(t) dp e^{-st} dt \\
 &= \int_0^1 \int_0^\infty h_p(t)e^{-st} dt dp \\
 &= \int_0^1 H_p(s) dp \quad (19)
 \end{aligned}$$

となる。\$H_p(s)\$ は、\$h_p(t)\$ のラプラス変換である。また、この \$H_p(s)\$ は、

$$\begin{aligned}
 H_p(s) &= \int_0^\infty h_c(t)del(t-p)e^{-st} dt \\
 &= h_c(p)e^{-ps} + h_c(p+1)e^{-(p+1)s} + \dots \\
 &= (h_c(p) + h_c(p+1)e^{-s} + \dots)e^{-ps} \\
 &= H'_p(s)e^{-ps} \quad (20)
 \end{aligned}$$

ただし、

$$H'_p(s) = h_c(p) + h_c(p+1)e^{-s} + \dots \quad (21)$$

と表現できる。\$H'_p(s)\$ に \$s = j2\pi k\$ を代入すると、

$$H'_p(j2\pi k) = \sum_{n=0}^\infty h_c(p+n) \quad (22)$$

が成立する。ここで、式 (9) の条件を仮定し、\$H(s)\$ に \$s = j2\pi k\$ を代入すると、

$$\begin{aligned}
 H(j2\pi k) &= \int_0^1 H_p(j2\pi k) dp \\
 &= \int_0^1 H'_p(j2\pi k)e^{-2\pi pk} dp \\
 &= K \int_0^1 e^{-j2\pi pk} dp \quad (23)
 \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\int_0^1 e^{-j2\pi pk} dp = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases} \quad (24)$$

に注意すると、\$H(s)\$ は \$s = j2\pi k, k = \pm 1, \pm 2, \dots\$ において零点をもつことになる。ゆえに、補助定理 1 より必要条件となる。

3.3 A-D 変換器における考察

D-A 変換器におけるチェス盤ひずみに関して考察する。

D-A 変換器における処理は、理想フィルタによる変換とそれを近似したフィルタによる変換の二つの場合に分けることができる。まず、理想フィルタは補助定理 1 に示した条件を明らかに満たす。したがって、チェス盤ひずみの問題は発生しない。また、近似フィルタによる変換は、一般に離散信号にホールドをかけて連続信号を生成し、この連続信号を近似フィルタに入力することによって実現される。このホールドの操作が、定理 3 に示した条件と対応する。ゆえにこのホールドにより連続信号を生成し近似フィルタに入力するという一連の処理全体は、定理 3 に示した式 (5) を満たすことが確認される。

しかし、計算機による一般的な補間においては、チェス盤ひずみの回避条件を満たす関数を使用する必要があり、本論文での結論が重要となる。

4. 離散時間領域との関係

提案した連続時間領域におけるチェス盤ひずみの回避条件と、先の離散時間領域における条件の関係を考察する。その結果、チェス盤ひずみを発生しない \$h_c(t)\$ から、チェス盤ひずみを発生しないデジタルフィルタを導くことが可能となる。

4.1 デジタルフィルタの生成

今、式 (10) の $H(s)$ を考える。この $H(s)$ を逆ラプラス変換すると、畳込み演算となり、

$$h_c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_0(p)g(t-p)dp \quad (25)$$

と表せる。ここで、 $g_0(t)$ は 0 次ホールド関数 ($g_0(t) = u(t) - u(t-1)$) であり、 $g(t)$ は絶対積分可能である。今、 U 倍の補間率を想定し、次式によりインパルス応答 $h(n)$ をもつデジタルフィルタを、長さ L の $h_c(t)$ から生成する。

$$\begin{aligned} h(n) &= h_c\left(\frac{n}{U}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g_0(p)g\left(\frac{n}{U}-p\right)dp \\ &\quad (0 \leq n \leq LU-1) \end{aligned} \quad (26)$$

式 (26) は、図 3 (b) に示すように、 t が整数となる時刻、及びその整数時刻を U 等分する時刻でサンプリングすることに相当する。この $h(n)$ に、式 (2) に示した、分割数 U でタイプ II のポリフェーズ分解を施す。このとき、直流利得 $R_i(1)$ は次のように求まる。

$$\begin{aligned} R_i(1) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kU+U-1-i) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_0(p)g\left(k+1-\frac{1+i}{U}-p\right)dp \\ &\quad (27) \end{aligned}$$

上式において、 $k+1-\frac{1+i}{U}-p = q$ と変数変換し、0 次ホールド $g_0(t)$ が、 $0 \leq t < 1$ において 1 という値

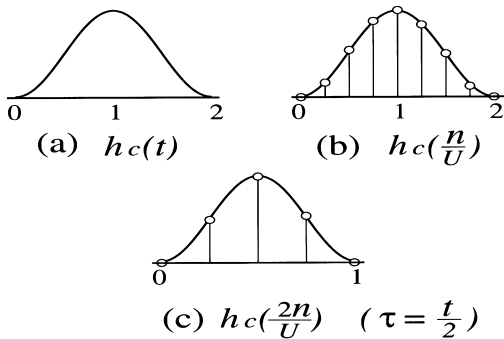


図 3 補間率 $U = 4$ におけるサンプリング
Fig. 3 Sampling in interpolation factor $U = 4$.

をもつことに注意すると、以下の結果を得る。

$$\begin{aligned} R_i(1) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 g\left(k+1-\frac{1+i}{U}-p\right)dp \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{k+1-\frac{1+i}{U}}^{k+1-\frac{1+i}{U}-1} \{-g(q)\}dq \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{k+1-\frac{1+i}{U}}^{k+1-\frac{1+i}{U}-1} g(q)dq \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(q)dq \end{aligned} \quad (28)$$

式 (28) の右辺は i に無関係な値となる。したがって、ポリフェーズフィルタ $R_i(z)$ の各直流利得は一致し、チェス盤ひずみは発生しない。

以上のことから、定理 3 を満たす連続補間関数を設計すれば、任意のレート変換率に対してチェス盤ひずみを発生しないデジタルフィルタを生成可能であることがわかる。その際のサンプリングは、整数値の t と、その間を U 等分する時刻で実行される。

また、連続補間関数とその周波数仕様を与えてあらかじめ設計する場合には、そのフーリエ変換値が $\omega = 2\pi k, k = \pm 1, \pm 2, \dots$ において零値となるという制約以外は、チェス盤ひずみの回避のためには特に必要ないことに注意してほしい。

4.2 時間スケール変換の性質

ここでは、定理 3 を満たす連続補間関数が、時間スケール変換を施されることにより、定理 3 を満たす保証がなくなること示す。

まず、 $h_c(t)$ が定理 3 を満たすと仮定する。この関数に時間スケール変換 $t = a\tau$ を行う。このとき、 $h_c(\tau)$ のラプラス変換 $H_\tau(s)$ は、次のようになる。

$$\begin{aligned} H_\tau(s) &= \frac{1}{|a|} H\left(\frac{s}{a}\right) \\ &= \frac{1}{|a|} \left(\frac{1-e^{-s/a}}{s/a}\right) G\left(\frac{s}{a}\right) \end{aligned} \quad (29)$$

この結果より、式 (10) の形での因数分解が保証されなくなることがわかる。

また時間スケール変換を施した $h_c(\tau)$ のサンプリングによりデジタルフィルタ $h(n)$ を生成しよう。それは、 $h_c(t)$ から次式により生成することに相当する。

$$h(n) = h_c\left(\frac{an}{U}\right) \quad (30)$$

図 3(c) は $U = 4, a = 2$ の例である．この $h(n)$ はチェス盤ひずみの発生を回避できない．そのことは，4.1 と同様の考えにより，容易に確認できる．

以上より，既知の連続関数を用いるには，適切な時間スケールの選択を必要とすることがわかる．

5. 具体例

ここでは，いくつかの具体的な連続補間関数に対して，定理 3 に基づきチェス盤ひずみ発生の有無を検証する．

5.1 B-スプライン

B-スプライン関数は，0 次ホールドを畳み込むことによって得られる [12], [13]．したがって，B-スプライン関数は，式 (10) のように表すことができ，チェス盤ひずみを発生しない関数となるはずである．

今，3 次の B-スプライン関数，

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}|x|^3 - |x|^2 + \frac{2}{3} & 0 \leq |x| < 1 \\ -\frac{1}{6}|x|^3 + |x|^2 - 2|x| + \frac{4}{3} & 1 \leq |x| < 2 \\ 0 & 2 \leq |x| \end{cases} \quad (31)$$

を例として考える [9], [10], [12]．この関数は 4 点の原信号より補間点を計算する．

上記の関数を， $x = t - 2$ と変数変換して， $f(t)$ が得られる (図 4(a))．これを，ユニットステップ信号 $u(t)$ を使って一つの式で表し，因数分解すると，

$$f(t) = \frac{1}{6}t^3u(t) - \frac{2}{3}(t-1)^3u(t-1) + (t-2)^3u(t-2) - \frac{2}{3}(t-3)^3u(t-3) + \frac{1}{6}(t-4)^3u(t-4) \quad (32)$$

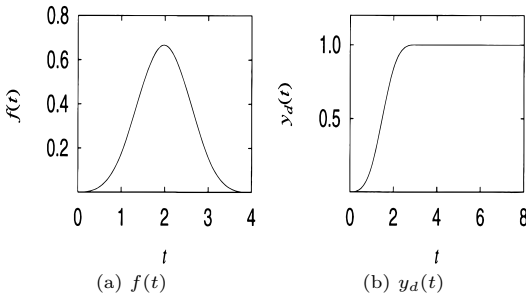


図 4 B-スプライン連続補間関数

Fig. 4 B-spline continuous interpolation function.

のようになる．これをラプラス変換すると，

$$F(s) = \left(\frac{1 - e^{-s}}{s}\right)^3 = \left(\frac{1 - e^{-s}}{s}\right) G(s) \quad (33)$$

となり，定理 3 で述べた因子の存在が確認できる．更に， $G(s)$ を逆ラプラス変換すると，

$$g(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}(t-1)^2u(t-1) + \frac{3}{2}(t-2)^2u(t-2) - \frac{1}{2}(t-3)^2u(t-3) \quad (34)$$

のようになる．式 (34) を $3 \leq t$ の範囲に限定すると， $g(t) = 0$ となり， $g(t)$ が絶対積分可能であることが確認される．したがって，定理 3 よりチェス盤ひずみを発生しない．

この関数のステップインパルス応答が図 4(b) である．出力が一定値に落ち着いていて，チェス盤ひずみが発生しないことが確認される．これに対し，例えば $t = 2\tau$ と時間軸変換すると， $f(\tau)$ における τ に対するラプラス変換は，定理 3 に示した因数をもたず，チェス盤ひずみが発生する．このときの連続補間関数が図 5(a)，ステップインパルス応答が図 5(b) である．図 5(b) より，チェス盤ひずみの発生が確認される．この関数をサンプリングして得られたものが，図 6(a) である．ただし，補間率 $U = 4$ としている．この離散フィルタに対応するステップ応答が図 6(b) である．チェス盤ひずみが発生し，定理 3 の離散時間領域への対応が確認される．

5.2 窓関数

次に，いくつかの窓関数を例として [11]，それを補

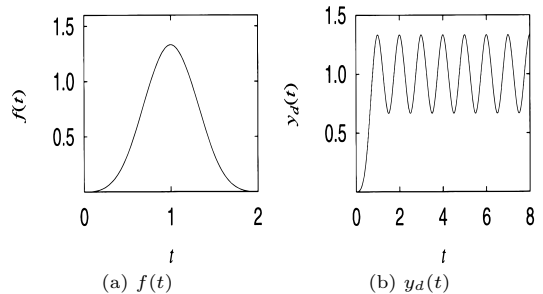


図 5 B-スプライン連続補間関数 (時間スケール変換)

Fig. 5 B-spline continuous interpolation function. (time-scaling)

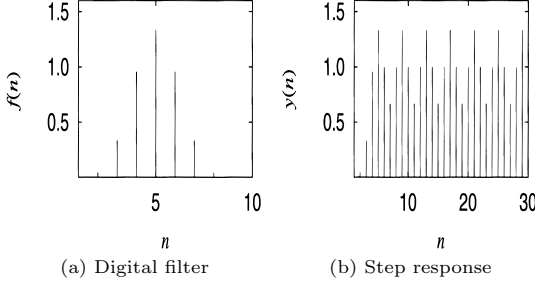


図6 デジタルフィルタ (補間率 $U = 4$)
Fig. 6 Digital filter. (interpolation factor $U = 4$)

間関数として利用したときのチェス盤ひずみに関して考察する .

A : ハニング窓

ハニング窓は次のような式で表される .

$$w_N(x) = \frac{1}{2}w_r(x) \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{T}\right) \right) \quad (35)$$

ここで, $w_r(x)$ は, 次のような方形窓である .

$$w_r(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & |x| > \frac{T}{2} \end{cases} \quad (36)$$

この式より, 周期 $T = 2$ とおき, $t = x - 1$ の変数変換を施すと, 図 7(a) のような補間関数を得られる . この関数を $u(t)$ を使って表すと,

$$w_N(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \pi t \right) u(t) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \pi(t-2) \right) u(t-2) \quad (37)$$

となり, この式のラプラス変換 $W_N(s)$ は,

$$\begin{aligned} W_N(s) &= \frac{1 - e^{-s}}{s} \left(\pi^2(1 + e^{-s})2(s^2 + \pi^2) \right) \\ &= \frac{1 - e^{-s}}{s} G(s) \end{aligned} \quad (38)$$

のように, 本論文の定理 3 で述べた因子が出てくる . ここで, $G(s)$ を逆ラプラス変換すると, 以下の $g(t)$ が求まる .

$$g(t) = \frac{\pi}{2} \{ u(t) \sin \pi t + u(t-1) \sin \pi(t-1) \} \quad (39)$$

この関数は, $0 \leq t < 1$ においてのみ値をもち, 絶対積分可能である . よって, チェス盤ひずみは発生しない . ステップインパルス応答が図 7(b) に示してあ

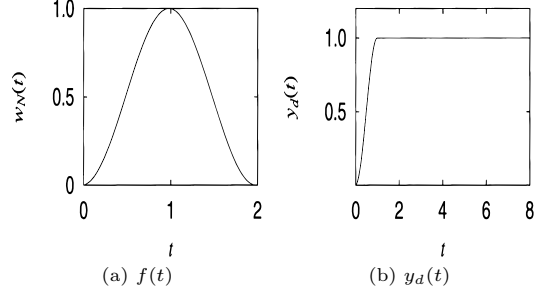


図7 ハニング窓
Fig. 7 Hanning window.

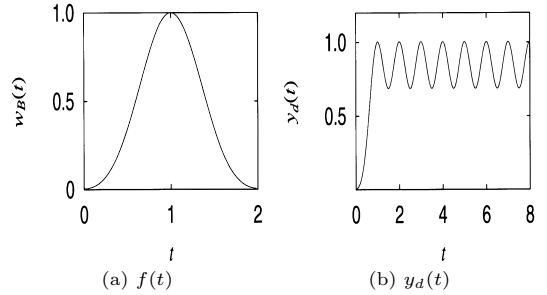


図8 ブラックマンハリス窓
Fig. 8 Blackmannharris window.

る . また, ハニング窓関数をフーリエ変換したものが, 図 9(a) である . $w = 2\pi k, k = \pm 1, \pm 2, \dots$ で零点をもち, このことから, 補助定理 1 よりチェス盤ひずみが発生しないことが確認される . また, 時間スケールの選択として, 周期 $T = 2$ は適切であったことも確認される .

B : ブラックマンハリス窓

ブラックマンハリス窓は次のような式で表される .

$$w_B(x) = w_r(x) \left(a_0 + a_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{T}\right) + a_2 \cos\left(\frac{4\pi x}{T}\right) \right) \quad (40)$$

$a_0 = 0.423, \quad a_1 = 0.498, \quad a_2 = 0.0792$

この式より, 周期 $T = 2$ として図 8(a) のような補間関数を得る ($t = x - 1$ に変数変換) . この関数を $u(t)$ を使って表すと,

$$\begin{aligned} w_B(t) &= (0.423 - 0.498 \cos \pi t + 0.0792 \cos 2\pi t) u(t) \\ &\quad - (0.423 - 0.498 \cos \pi(t-2) \\ &\quad + 0.0792 \cos 2\pi(t-2)) u(t-2) \end{aligned} \quad (41)$$

となり, この式をラプラス変換すると,

$$W_B(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s} G(s) \quad (42)$$

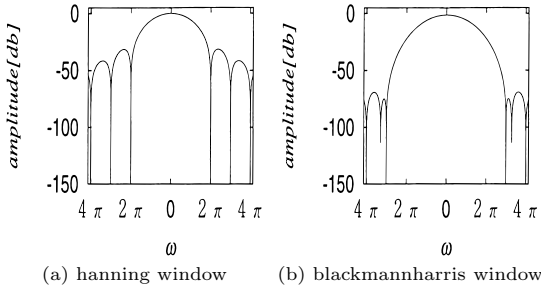


図9 窓関数の周波数応答 (周期 $T = 2$)
 Fig. 9 Amplitude response of window functions.
 (period $T = 2$)

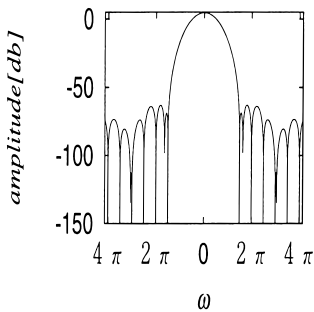


図10 ブラックマンハリス窓周波数応答 (周期 $T = 4$)
 Fig. 10 Amplitude response of Blackmannharris window.
 (period $T = 4$)

のように、本論文の定理に基づいた因子を出すことができる。しかし、 $G(s)$ を逆ラプラス変換すると、無限に続く関数となり、絶対積分可能でなくなる。

よって、定理3よりチェス盤ひずみが発生する。ステップインパルス応答が図8(b)に示してある。

また、ブラックマンハリス窓関数のフーリエ変換が図9(b)に示してある。この図の零点の位置からも、補助定理1によってチェス盤ひずみが発生することが確認される。

しかし、このブラックマンハリス窓に時間スケール変換を施す、つまり周期 T を2から4に変更することによって、チェス盤ひずみを回避することができる。このことは、周期 $T = 4$ のときのフーリエ変換図10において、補助定理に示した零点を有することから確認される。

以上の結果より、ハニング窓は周期 $T = 2$ を、ブラックマンハリス窓は周期 $T = 4$ を選ぶことによって、これらの窓関数を補間関数として用いることができる。



(a) Original image



(b) Expansion image with the factor 4/3



(c) Expansion image with the factor 4/3

図11 画像処理例

Fig. 11 Examples of an image.

5.3 画像処理

実際の画像処理例を示す。ここでは、3次B-スプライン連続補間関数を用いる。まず、原画(図11(a))を4/3倍にしたものが図11(b)である。チェス盤ひずみが発生していないことが確認される。次に、時間軸変換 ($t = 2\tau$) を行って得られたフィルタを用いて4/3倍の拡大処理を行ったのが図11(c)である。チェス盤ひずみが発生していることが確認できる。

6. むすび

以上、離散時間領域でのチェス盤ひずみに基づき、連続時間領域におけるチェス盤ひずみの新たな定義を導入し、その回避条件を示した。また、その条件を満

たした連続補間関数に適切なサンプリングを施すこと
によって得られたデジタルフィルタが、離散時間領
域におけるチェス盤ひずみの回避条件を満たすこと
も確認された。

また、実際に使われている連続補間関数や窓関数で、
チェス盤ひずみ回避に関して検討した結果、本論文の
定理に基づいていることが確認され、同時に定理の正
当性の検証がされた。

これにより、本論文の定理に基づく一つの連続補間
関数から、チェス盤ひずみを発生しない任意の拡大率
のデジタルフィルタを生成できることとなる。また、
この連続補間関数として、既知の連続関数である窓関
数を用いることもできることが明らかとなった。

文 献

- [1] 貴家仁志, マルチレート信号処理, 昭晃堂, 1995.
- [2] G. Strang and T. Nguyen, Wavelets and Filter Banks, Wellesley-Cambridge Press, 1996.
- [3] 加藤正輝, 吉田俊介, 西原明法, “時間応答を考慮したマルチレートフィルタの設計”, 信学技報, CAS96-52, Sept. 1996.
- [4] 原田康裕, 貴家仁志, “チェス盤ひずみを伴わないマルチレートフィルタとその零点配置について”, 信学技報, CAS97-01, Jan. 1997.
- [5] 加藤正輝, 吉田俊介, 西原明法, “時間応答を考慮したフィルタバンクの設計”, 第11回デジタル信号処理シンポジウム, Nov. 1996.
- [6] 原田康裕, 村松正吾, 貴家仁志, “チェス盤ひずみを伴わない2分割QMFバンクとそのラティス構成”, 信学論(A), vol.J80-A, no.11, pp.1857-1867, Nov. 1997.
- [7] Y. Harada, S. Muramatsu, and H. Kiya, “Multidimensional Multirate Filter and Filter Bank without Checkerboard Effect,” IEICE Trans. Fundamentals, vol.E81-A, no.8, Aug. 1998.
- [8] 田村友宏, 吉田俊之, 西原明法, 酒井喜則, “2次元マルチレートフィルタを用いた動画の走査線変換”, 第12回デジタル信号処理シンポジウム, pp.549-554, Nov. 1997.
- [9] 桜井 明, スプライン関数入門, 東京電機大学出版局, 1981.
- [10] 桜井 明, 吉村和美, 高山文雄, パソコンによるスプライン関数, 東京電機大学出版局, 1988.
- [11] 城戸健一, デジタル信号処理入門, 丸善, 1985.
- [12] R. Crane, A SIMPLIFIED APPROACH TO IMAGE PROCESSING, New Jersey, Prentice Hall PTR, 1997.
- [13] M. Vetterli and J. Kovacevic, Wavelets and Subband Coding, New Jersey, Prentice Hall PTR, 1995.

(平成10年8月3日受付, 11年2月2日再受付)



村上 雅治 (学生員)

平10 都立大・工・電子・情報卒。現在、
同大学院修士課程在学中。マルチレート
信号処理, 画像処理の研究に従事。



貴家 仁志 (正員)

1980 長岡技科大・工・電気電子システム
卒。1982 同大学院修士課程了。同年東
京都立大工学部電気工学科助手。現在、同
大学電子・情報工学科助教授。工博。1995
シドニー大(オーストラリア)客員研究員。
マルチレート信号処理, 画像処理及び信号
処理アルゴリズムのVLSI実現に関する研究に従事。著書「高
速フーリエ変換とその応用」, 「デジタル信号処理技術入門」,
「マルチレート信号処理」。電子画像学会, テレビジョン学会,
IEEE 各会員。