

# DCT 符号相関と対称畳み込みの関係について

## Relationship between DCT Sign Correlation and Symmetric Convolution

伊藤泉<sup>†</sup>

貴家仁志<sup>‡</sup>

<sup>†</sup> 首都大学東京大学院 システムデザイン研究科

Izumi ITO<sup>†</sup>

Hitoshi KIYA<sup>‡</sup>

<sup>†</sup>Graduate School of System Design, Tokyo Metropolitan University

**アブストラクト** 信号の DCT 係数の正負符号を用いて信号間の相対的な類似度および平行移動量を推定する DCT 符号相関と対称畳み込みの関係を考察する。この考察によって、対称拡張の種類の違いによる畳み込み計算式から、DCT 符号相関群を定義することができる。さらに、正負符号を用いることによる相関計算への効果が信号の無相関化という観点から説明される。

### 1 はじめに

筆者らによって提案された DCT 符号相関は、信号の離散コサイン変換 (discrete cosine transform: DCT) 係数の正負符号のみを用い、信号間の類似度および平行移動量を推定する手法である [1][2]。圧縮信号など、既に DCT 変換された信号においては、変換された領域から直接計算することができ、すなわち、実数演算によって相関計算ができること、圧縮信号との高い親和性等が主な利点として挙げられる。DCT 符号相関は、位相限定相関 [3] との関係から導出されている。この関係は、信号の DCT 係数の正負符号と、その信号を対称拡張した信号の位相項との関係式を基礎とし、DCT 係数の正負符号は位相に相当することが、その導出から示された。しかし、その対称拡張操作の影響については十分な議論が行われていない。

一方、対称畳み込みは、対称拡張した有限長信号の周期的畳み込みとして定義される。その目的は、畳み込みにおいて生じる信号端の影響の回避であり、応用として画像圧縮の効率改善等がある [4]-[7]。さらに、対称畳み込みと DCT および離散サイン変換 (discrete sine transform: DST) の乗算性質が Martucci[8] によって導出され、40 種類の対称畳み込みが定義されている。後に、多次元処理のため行列対角化表現がなされた [9]。

本稿では、DCT 符号相関が対称畳み込みの特別な場合に相当することを示す。信号が無相関のとき対称畳み込みを用いた相関計算から、対称拡張前の信号の相関を求めることができることを示す。さらに、DCT 係数の正負符号のみを用いて相関を計算することが、信号の無相関化処理に対応し、対称拡張の影響を回避し、対称拡張前

の信号間の相関計算となることを示す。

### 2 準備

DCT 符号相関および対称畳み込みについて述べる。簡略化の為、一次元信号を用いて示す。  $n, k$ , および  $i$  は整数を表す。

#### 2.1 DCT 符号相関

$N$  点信号  $x(n)$  の DCT タイプ 2 (DCT-II) 係数  $X_C(k)$  は、

$$X_C(k) = \sqrt{\frac{2}{N}} f_k \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos\left(\frac{\pi(n+1/2)k}{N}\right) \quad (1)$$

ここで、

$$f_k = \begin{cases} 1/\sqrt{2}, & k = 0 \\ 1, & k \neq 0 \end{cases} \quad (2)$$

と与えられる。  $\cos(\pi(n+1/2)k/N)$  は変換核と呼ばれ、各タイプにより変換核は異なる。

$N$  点信号  $x(n)$  および  $y(n)$  の DCT-II 係数を  $X_C(k) = |X(k)|\sigma_X(k)$  および  $Y_C(k) = |Y(k)|\sigma_Y(k)$  とし、  $\sigma_X(k)$  および  $\sigma_Y(k)$  をその正負符号とする。 DCT 符号相関  $r_C(n)$  は、

$$r_C(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k \sigma_X(k) \cdot \sigma_Y(k) \cos\left(\frac{\pi nk}{N}\right) \quad (3)$$

と定義される [1][2]。ここで、  $F_k$  は重みであり、一般に  $F_k = (f_k)^2$  と与えられる。式 (3) の変換核、  $\cos(\pi nk/N)$  は DCT タイプ 1 (DCT-I) の変換核に相当する。

#### 2.2 対称畳み込み

対称信号は、その対称軸上に信号があるかどうか (whole-sample/half-sample)、また、信号が対称か反対称か (symmetry/antisymmetry) によって、四種類のタイプがある。図 1(a) および図 1(b) に WS (whole-sample symmetry) タイプおよび、HS (half-sample symmetry) タイ

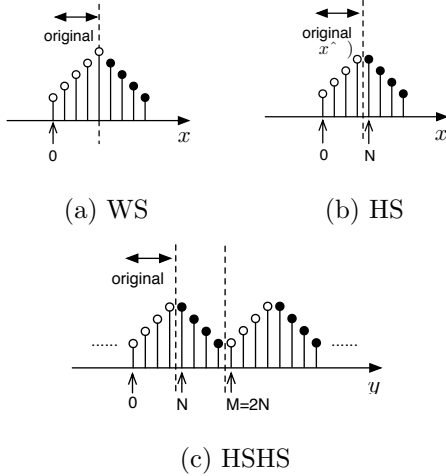


図 1: 対称周期信号

の例を示す.  $x(n)$  を原信号とすると, HS タイプの対称信号は以下のように与えられる.

$$\hat{x}(n) = \begin{cases} x(n), & n=0, 1, \dots, N-1 \\ x(M-n-1), & n= N, N+1, \dots, M-1 \end{cases} \quad (4)$$

ここで,  $M = 2N$  である.

対称信号の周期を仮定した対称周期信号では, 周期となる対称軸の場所および対称/反対称によって, 一つの対称信号に対して対称信号と同様に四種類の場合があり, 合計 16 種類の対称周期信号がある. HSHS タイプの対称周期信号を図 1(c) に示す.

$x(n)$  および  $y(n)$  を有限長信号とし,  $v(n)$  をそれらの畳み込んだ出力とする. 対称畳み込みの一般式は,

$$v(n) = (\epsilon_a[x(n)] \circledast \epsilon_b[y(n)]) \mathcal{R}_K(n) \quad (5)$$

と与えられる. ここで, 演算子 ' $\circledast$ ' は循環畳み込み,  $\epsilon_a[\cdot]$  および  $\epsilon_b[\cdot]$  はそれぞれ  $x(n)$  および  $y(n)$  の対称畳み込み演算子,  $\mathcal{R}_K(n)$  は基本周期からサンプル点を抽出する長さ  $K$  の矩形窓とする.

また,  $v(n)$  は, 変換領域においても次式により計算することができる.

$$v(n - n_0) = T_c^{-1} [T_a[x(n)] \times T_b[y(n)]] \quad (6)$$

ここで, 演算子  $T_a[\cdot]$ ,  $T_b[\cdot]$ , および  $T_c[\cdot]$  は  $x(n)$  および  $y(n)$  の対称周期信号に対応する DCT あるいは DST であり, ' $\times$ ' は要素毎の乗算を示し,  $n_0$  は 0 または 1 をとる.  $n_0$  の値はそれぞれの対称拡張のタイプによって異なる [8].

図 2 に示すように, 二つの入力信号が HSHS タイプの対称周期信号であっても, 出力は入力と同じタイプの対称周期信号にはならない. すなわち, HSHS タイプに相当する DCT-II は, 逆変換に WSWs タイプに相当する DCT-I

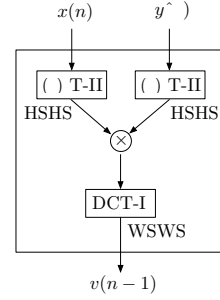


図 2: 対称畳み込み例 (DCT-II).

を用いる. このように, 各タイプの DCT または DST は混合され用いられる.

### 3 対称畳み込みに基づく相関計算

DCT 符号相関が対称畳み込みの特別な場合であることを示し, DCT のみならず DST を含め, 各タイプによる DCT/DST 符号相関が対称畳み込みにより定義されることを示す.

#### 3.1 相関と対称畳み込み

対称畳み込みと相関の関係を述べる. ここでは, 例として, 入力信号に HSHS タイプの対称周期信号を用いる.  $\hat{x}(n)$  および  $\hat{y}(n)$  を  $M$  点の HS タイプの対称拡張信号とする. 図 3 に示すように, この対称拡張信号は二つの  $N$  点有限長信号に分解される. すなわち,

$$\hat{x}(n) = x(n) + x_s(n) \quad (7)$$

$$\hat{y}(n) = y(n) + y_s(n) \quad (8)$$

と与えられる. ここで

$$x_s(n) = x(M - n - 1) \quad (9)$$

$$y_s(n) = y(M - n - 1) \quad (10)$$

となる. 循環畳み込みは線形性を有するため,  $\hat{x}(n)$  および  $\hat{y}(n)$  の畳み込みは以下のように展開される.

$$\begin{aligned} \hat{x}(n) \circledast \hat{y}(n) &= (x(n) + x_s(n)) \circledast (y(n) + y_s(n)) \\ &= x(n) \circledast y(n) + x(n) \circledast y_s(n) \\ &\quad + x_s(n) \circledast y(n) + x_s(n) \circledast y_s(n) \end{aligned} \quad (11)$$

ここで,  $\hat{x}(n)$  および  $\hat{y}(n)$  の循環畳み込みは

$$x(n) \circledast y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} x(k)y(((n-k))_M) \quad (12)$$

と定義される. 表記  $((n))_M$  は  $(n \bmod M)$  を表す.

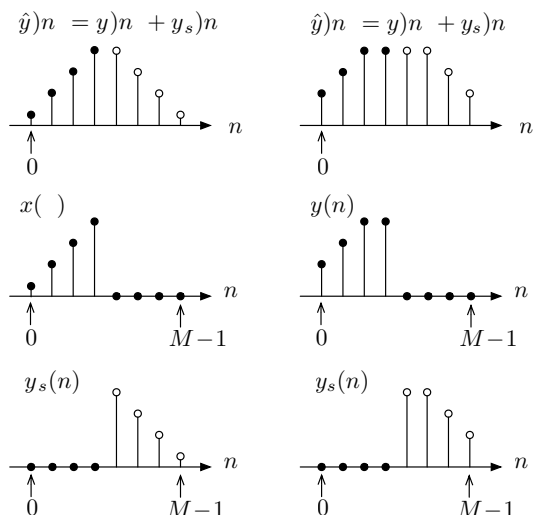


図 3: 対称信号の分解

一方,  $\hat{x}(n)$  および  $\hat{y}(n)$  の循環相関は

$$x(n) \odot y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} x(k)y(((n+k))_M) \quad (13)$$

と与えられる. ここで, 演算子 ‘ $\odot$ ’ は循環相関を表す. 式 (10) から, 式 (11) の第二項は,

$$\begin{aligned} x(n) \otimes y_s(n) &= x(n) \otimes y(M-n-1) \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} x(k)y(((n+k+1))_M) = x(n) \odot y(n+1) \end{aligned} \quad (14)$$

と書き換えられ, 同様に循環畳み込みの可換性により, 式 (11) の第三項は,

$$\begin{aligned} x(M-n-1) \otimes y(n) &= y(n) \otimes x(M-n-1) \\ &= y(n) \odot x(n+1) \end{aligned} \quad (15)$$

と表すことができる. 従って, 式 (14) および (15) から, 式 (11) は,

$$\begin{aligned} \hat{x}(n) \otimes \hat{y}(n) &= x(n) \otimes y(n) + x(n) \odot y(n+1) \\ &\quad + y(n) \odot x(n+1) + x_s(n) \otimes y_s(n) \end{aligned} \quad (16)$$

と整理される. このように, 対称畳み込みは二つの畳み込み項と二つの相関項によって表される. [8] より, たとえ信号がいずれのタイプの DCT または DST に変換されていても, それを一度空間領域に戻す必要はなく, 直接変換領域から計算することができる.

### 3.2 対称畳み込みによる相関計算

ここで, 式 (16) の第三および第四項が零値であること, すなわち,

$$\begin{cases} x(n) \otimes y(n) = 0 \\ x_s(n) \otimes y_s(n) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

を仮定する. この仮定の下, 式 (16) は,

$$\begin{aligned} \hat{v}(n) &= \hat{x}(n) \otimes \hat{y}(n) \\ &= x(n) \odot y(n+1) + y(n) \odot x(n+1) \end{aligned} \quad (18)$$

$$n = 0, 1, \dots, 2N-1$$

と与えられる. すなわち, 式 (17) が成立するとき,  $\hat{x}(n)$  および  $\hat{y}(n)$  の対称畳み込みは, 循環相関の重ね合わせとして表記される. さらに,

$$y(n) \odot x(n+1) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (19)$$

のとき,

$$v(n) = \hat{v}(n)\mathcal{R}_N(n) = (x(n) \odot y(n+1))\mathcal{R}_N(n) \quad (20)$$

となる. ここでは, それぞれの相関が鋭いピーク形状を持つとき, 互いにほぼ無干渉のため, 式 (19) の条件は, 妥当であると考えられる. 従って, 式 (17) および (19) の条件の下では, 対称畳み込みは, 対称拡張前の信号の相関計算と一致する. 式 (17) の条件は,  $x(n)$  が直交または無相関のとき成立し, その時, 式 (19) も同時に満たされる.

### 3.3 相関計算の手順

相関計算の手順は, 与えられた信号が無相関信号か相関のある信号かによって異なる.

#### A. 無相関信号の場合

1. DCT/DST を二つの信号に適用する.
2. DCT/DST 係数の要素毎の乗算を行う.
3. 対応する DCT/DST を乗算結果に適用する.

#### B. 相関のある信号の場合

1. DCT/DST を二つの信号に適用する.
2. DCT/DST 係数に無相関処理を行う.
3. DCT/DST 係数の要素毎の乗算を行う.
4. 対応する DCT/DST を乗算結果に適用する.

ここで, B の手順 2 の無相関処理の一つが DCT/DST 係数の正負符号のみを用いることに対応すると考えると, DCT 符号相関は対称畳み込みの特別な場合となる. さらに, DCT 符号相関は, 対称拡張した信号の相関ではなく, 原信号の相関の計算法に帰着する.

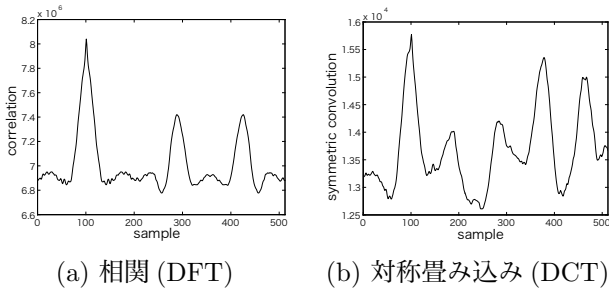


図 4: 画素間相関のある信号の相関

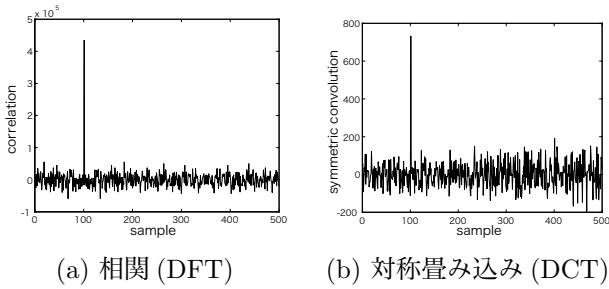


図 5: 乱数列の相関

#### 4 シミュレーション

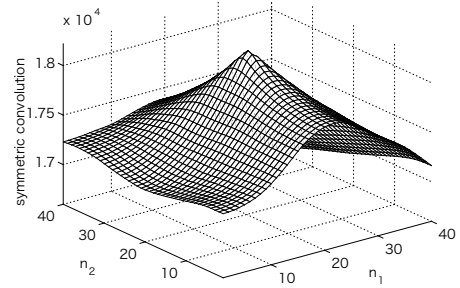
まず、画素間相関のある信号に対して対称畳み込みを行った。信号には、画像 Lena(512×512, 8bits/pixel) の一ラインを用い、それを 100 サンプルシフトさせた信号と対称畳み込みを行った。図 4(a) および (b) に DFT を用いた相関計算および対称畳み込みの結果を示す。DFT を用いた相関計算では、大きなピークが三つあり、対称畳み込みを用いた相関計算では、三つの大きなピークの他にも、二つのピークがあることが確認でき、二つの結果は大きく異なっていることがわかる。

次に、画素間相関のない信号に対して対称畳み込みを行った。信号には、区間 (-50, 50) 上の一様分布に独立に従う 500 点の乱数列を用い、二つの信号間に 100 サンプルのシフトを与えた。図 5(a) および (b) に DFT を用いた相関計算および対称畳み込みの結果を示す。共に、一つの鋭いピークが確認できる。画素間相関があるときと比べ、二つの結果は似ており、シフト量を正しく推定していることがわかる。

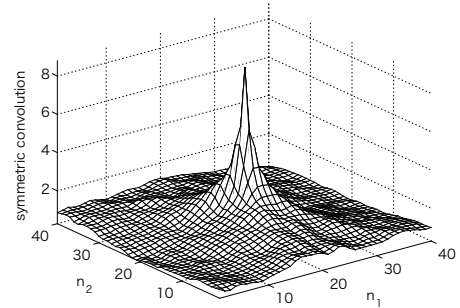
さらに、二次元信号に対して、対称畳み込みを行った。信号には、画像 Lena (512×512, 8bits/pixel) を用い、水平・垂直方向に 20 サンプルシフトさせた。無相関処理として以下の処理を行った。

$$v(n - n_0) = T_c^{-1}[W_a T_a[x(n)] \times W_b T_b[y(n)]] \quad (21)$$

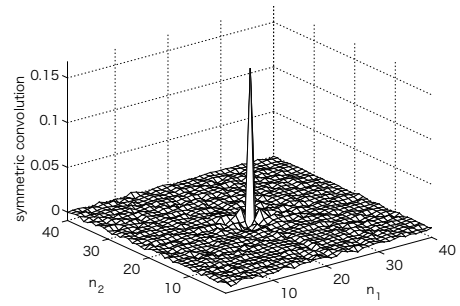
ここで、 $W_a$  および  $W_b$  は重みであり、ここでは、それぞれの重みを、1 または、DCT 係数の絶対値の逆数 ( $R$  と



(a) 無相関処理無し ( $W_a = W_b = 1$ )



(b) 無相関処理 ( $W_a = 1, W_b = R$ )



(c) 無相関処理 ( $W_a = R, W_b = R$ )

図 6: 二次元信号の相関

表示) とした。例として、式 (21) の  $T_a[\cdot]$  を DCT-II とすると、式 (1) より、 $T_a[x(n)]$  は、

$$T_a[x(n)] = X_C(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (22)$$

と与えられ、 $W_a = R$  のとき、

$$W_a T_a[x(n)] = \frac{1}{|X_C(k)|} \cdot X_C(k) = \sigma_X(k) \quad (23)$$

となる。すなわち、重みが DCT 係数の絶対値の逆数であるとき、 $W_a T_a[x(n)]$  の値は DCT 係数の正負符号となる。図 6 にそれぞれの結果を示す。この無相関処理によって、鋭いピーク形状がシフト量を表す位置に現れることが確認できる。

次に、水平ライン上で  $k$  画素離れた二つの画素を  $f_1$  および  $f_2$  としたときの  $(f_1, f_2)$  の散布図を図 7 に示す。

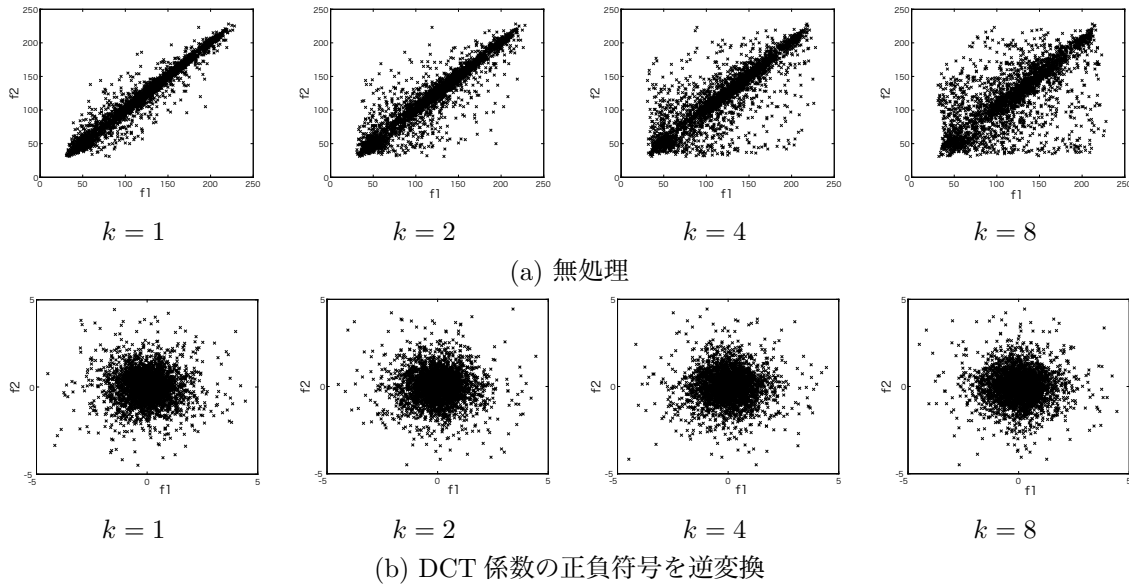


図 7:  $k$  画素間の相関

図 7(a) は、画像 Lena 上のラインの結果であり、 $k = 1$  および  $k = 2$  では、画素間相関が高く、 $k$  が大きくなるにつれ、その相関は低くなっていくことがわかる。一方、図 7(b) は、同ラインに対して一度 DCT 変換後、その正負符号のみを逆変換した結果である。図 7(a) とは異なり、 $k$  の大きさによらず、画素間相関は高くないことがわかる。

## 5 まとめ

対称畳み込みを用いて、信号が無相関または直交する時、対称拡張前の相関を求めることができ、さらに、信号が無相関または直交しない時でも、無相関処理を変換領域において行うことによって、拡張前の相関を求めることができることを示した。位相との関係から導出された DCT 符号相関は、対称畳み込みの特別の場合として考えることができ、さらには、DCT 係数の符号のみを用いることは、無相関処理に対応することを述べた。

## 参考文献

- [1] I. Ito and H. Kiya, “DCT Sign-Only Correlation with Application to Image Matching and the Relationship with Phase-Only Correlation,” in Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech and Signal Processing, pp. 1237–1240, Apr. 2007
- [2] I. Ito and H. Kiya, “Multiple-Peak Model Fitting Function for DCT Sign Phase Correlation with Non-Integer Shift Precision,” in Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech and Signal Processing, pp. 449–452, Apr. 2009
- [3] C. D. Kuglin and D. C. Hines, “The Phase Correlation Image Alignment Method,” in Proc. Int. Conf. Cybernetics and Society, pp. 163–165, Sept. 1975.
- [4] H. Kiya, K. Nishikawa, and M. Iwahashi: “A Development of Symmetric Extension Method for Sub-band Image Coding,” IEEE Trans. Image Process., pp. 78–81, vol. 3, no. 1, Jan. 1994.
- [5] K. N. Ngan and R. J. Clarke, “Lowpass filtering in the cosine transform domain,” in Proc. Int. Conf. Communications, pp. 37.7.1–37.7.5, June 1980.
- [6] R. Kresch and N. Merhav, “Fast DCT Domain Filtering Using the DCT and the DST,” IEEE Trans. Image Process., vol. 8, no. 6, pp. 821–833, June 1999.
- [7] Y. G. Reju, S. N. Koh, and I. Y. Soon, “Convolution Using Discrete Sine and Cosine Transforms, IEEE Signal Process. Lett., vol. 14, no. 7, pp. 445–448, July 2007.
- [8] S. A. Martucci, “Symmetric Convolution and the Discrete Sine and Cosine Transforms,” IEEE Trans. Signal Process., vol. 42, pp. 1038–1051, May 1994.
- [9] T. M. Foltz, and B. M. Welsh, “Symmetric Convolution of Asymmetric Multidimensional Sequences Using Discrete Trigonometric Transforms,” IEEE Trans. Image Process., vol. 8, no. 5, pp. 640–651, May 1999.