

# DCT 領域での相関計算法と白色化信号の効果

## Correlation in the DCT Domain and The Effect of Whitened Signals

伊藤 泉<sup>†</sup>                      貴家仁志<sup>‡</sup>

†東京工業大学 教育工学開発センター

‡首都大学東京 システムデザイン学部

Izumi ITO<sup>†</sup>

Hitoshi KIYA<sup>‡</sup>

†The Center for Research and Development of Educational Technology,  
Tokyo Institute of Technology

‡Faculty of System Design, Tokyo Metropolitan University

**アブストラクト** 相関計算とは、二つの関数の類似性を調べることを目的に、二つの関数のずらした時の内積計算をいい、ずらし幅の関数である相関関数を得ることをいう。また、相関計算は、空間領域における計算のみならず、周波数領域においても計算可能であることは広く知られている。本稿では、DCT 領域における相関計算法を提案する。信号に零値を適切に挿入することにより、DCT 領域において相関関数を得ることができることを述べる。さらに、零値を挿入しない場合でも、信号の白色化により、相関計算を行うことが可能であることを示す。

### 1 はじめに

相関計算は、二つの信号の類似性および、位置ずれ量を推定可能であり、多くの分野において用いられている。空間領域および周波数領域において計算可能であり、後者では離散フーリエ変換 (discrete Fourier transform: DFT) 係数のクロススペクトルから求めることができる。筆者らは、離散コサイン変換 (discrete cosine transform: DCT) 係数の符号と DFT 係数の位相項の関係を導出し、DCT 係数の正負符号のみを用いて行う、DCT 符号相関を提案した [1][2][3]。さらに、DCT 符号相関は、単純周期による信号端の不連続性の回避に有効であることを示してきた [4]。

一方、対称畳み込みは、対称に拡張した有限長信号の周期的畳み込みとして定義され、信号端の影響の回避および、画像圧縮の効率改善などを目的に研究されてきた [5]。Martucchi により、DCT および離散サイン変換 (discrete sine transform: DST) を用いて行う対称畳み込みが提案され、40 種の対称畳み込み演算が定義されている [6]。また、対称畳み込みを用い、直線畳み込みの結果を得ることも可能であるが、信号への零値の挿入に加え、重複加算法または重複保持法による処理を要する。

本稿では、DCT 領域における相関計算法を提案する。相関計算への入力信号を適切に生成することにより、DCT 領域において相関計算を行うことができることを示す。零値の挿入がない場合でも、白色化により DCT 領域において相関計算が有効に行うことができることを示す。

特に混乱のない限り、DCT タイプ 2 を DCT と示す。ℤ および ℝ は、整数全体および実数全体を示す。

### 2 準備

相関関数の定義、および対称拡張した信号と DCT の関係について述べる。

#### 2.1 相関関数

二つの  $M$  点信号  $s_1(n) \in \mathbb{R}$  と  $s_2(n) \in \mathbb{R}$ ,  $n = 0, 1, \dots, M-1$  の相関関数  $r(l)$  を

$$r(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_1(n)s_2(n+l) \quad (1)$$

と定義する。このとき、 $r(l)$  は  $2M-1$  点の出力があることが知られている。

いま、 $N = 2M-1$  とし、 $s_1(n)$  および  $s_2(n)$  に零値を挿入した信号、 $s'_1(n)$  および  $s'_2(n)$  を

$$s'_1(n) = \begin{cases} s_1(n), & n = 0, 1, \dots, M-1 \\ 0, & n = M, M+1, \dots, N-1 \end{cases} \quad (2)$$

$$s'_2(n) = \begin{cases} s_2(n), & n = 0, 1, \dots, M-1 \\ 0, & n = M, M+1, \dots, N-1 \end{cases} \quad (3)$$

と定義する。 $r(l)$ ,  $-(N-1)/2 \leq l \leq (N-1)/2$  は、

$$r(l) = \sum_{n=0}^{N-1} s'_1(n)s'_2(((n+l))_N) \quad (4)$$

と計算できる。ここで、 $((x))_N$  は、 $x$  modulo  $N$  を表す。

式 (4) は, DFT を用い, クロススペクトルを求めることにより計算可能である.  $s'_i(n)$ ,  $i = 1, 2$  の  $N$  点 DFT 係数,  $S_i(k)$  を

$$S_i(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s'_i(n) W_N^{nk} \quad (5)$$

とすると, クロススペクトル  $R(k)$  は,

$$R(k) = S_1^*(k) S_2(k) \quad (6)$$

と与えられる. ここで,  $W_N = \exp(-j2\pi/N)$ , および  $S_1^*(k)$  は  $S_1(k)$  の複素共役を表す.  $r'(l)$ ,  $0 \leq l \leq N-1$  は,  $R(k)$  の  $N$  点逆 DFT として,

$$r'(l) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} R(k) W_N^{-lk} \quad (7)$$

と定義される.  $r'(l)$  と相関関数  $r(l)$  には以下の関係がある.

$$r(l) = \begin{cases} r'(l) & l = 0, 1, \dots, M-1 \\ r'(l+N) & l = -1, -2, \dots, -(M-1) \end{cases} \quad (8)$$

## 2.2 対称拡張した信号と DCT

$N$  点信号  $f_1(n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$  の DCT 係数,  $F_C(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$  は,

$$F_C(k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} k_k f_1(n) \cos\left(\frac{\pi(n-1/2)k}{N}\right) \quad (9)$$

$$k_k = \begin{cases} 1/\sqrt{2}, & n = 0 \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (10)$$

と定義される. いま,  $2N$  点に対称拡張した信号  $f(n)$  を,  $f_1(n)$  を用いて

$$f(n) = \begin{cases} f_1(n), & 0, 1, \dots, N-1 \\ f_1(2N-n-1), & N, N+1, \dots, 2N-1 \end{cases} \quad (11)$$

と定義し,  $f(n)$  の  $2N$  点 DFT 係数を  $F(k)$  とすると,  $F(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, 2N-1$  と  $F_C(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$  は,  $k = 0, 1, \dots, N-1$  のとき,

$$F_C(k) = \sqrt{\frac{1}{2N}} k_k W_{2N}^{\frac{k}{2}} F(k) \quad (12)$$

$$\Leftrightarrow F(k) = \alpha_k F_C(k) W_{2N}^{-\frac{k}{2}} \quad (12)$$

$$\alpha_k = \sqrt{2N}/k_k \quad (13)$$

の関係がある [7][8]. また,  $F(k) = |F(k)|\phi_F(k)$  の位相項  $\phi_F(k)$  と  $F_C(k) = |F_C(k)|\sigma_F(k)$  の正負符号  $\sigma_F(k)$  には,

$$\sigma_F(k) = W_{2N}^{\frac{k}{2}} \phi_F(k) \quad (14)$$

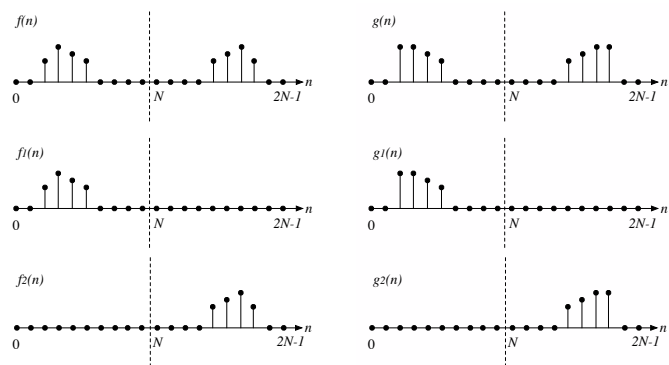


図 1: 信号の定義例

の関係がある [1][2].

従って,  $N$  点信号を式 (11) に従い,  $2N$  点に対称拡張した信号の  $2N$  点 DFT 係数を  $N$  点の DCT 係数から計算可能である.

以下では, 対称拡張した二つの信号の相関計算を考察する.

## 3 DCT 領域での相関計算法

対称拡張した信号の相関計算において, 拡張した信号の影響を考察し, DCT 領域における相関計算に必要な信号の生成法を示す.

### 3.1 対称拡張した信号の相関関数

$s_1(n)$  および  $s_2(n)$  を  $N$  点実信号とする. この信号を, 式 (11) に従い, 対称拡張した  $2N$  点の信号  $f(n)$  および  $g(n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, 2N-1$  を

$$f(n) = f_1(n) + f_2(n) \quad (15)$$

$$g(n) = g_1(n) + g_2(n) \quad (16)$$

と定義する. ただし,

$$f_1(n) = \begin{cases} s_1(n) & n = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & n = N, N+1, \dots, 2N-1 \end{cases} \quad (17)$$

$$g_1(n) = \begin{cases} s_2(n) & n = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & n = N, N+1, \dots, 2N-1 \end{cases} \quad (18)$$

であり,

$$f_2(n) = f_1(2N-n-1) \quad (19)$$

$$g_2(n) = g_1(2N-n-1) \quad (20)$$

の関係がある. 図 1 にその一例を示す.

$f(n)$  および  $g(n)$  の相関関数,  $r_{f,g}(l)$  を考える. それぞれの  $2N$  点 DFT 係数を  $F(k)$ ,  $G(k)$  および  $R(k)$  とす

ると,

$$\begin{aligned}
R(k) &= F^*(k) \cdot G(k) \\
&= (F_1^*(k) + F_2^*(k))(G_1(k) + G_2(k)) \\
&= R_{f_1, g_1}(k) + R_{f_1, g_2}(k) + R_{f_2, g_1}(k) + R_{f_2, g_2}(k)
\end{aligned} \tag{21}$$

と  $R(k)$  は四つのクロススペクトル ( $R_{f_1, g_1}(k)$ ,  $R_{f_1, g_2}(k)$ ,  $R_{f_2, g_1}(k)$ ,  $R_{f_2, g_2}(k)$ ) の重ね合わせとして表現される。ここで,

$$R_{f_1, g_1}(k) = F_1^*(k) \cdot G_1(k) \tag{22}$$

$$R_{f_1, g_2}(k) = F_1^*(k) \cdot G_2(k) = F_1^*(k) \cdot G_1^*(k) W_{2N}^{-k} \tag{23}$$

$$R_{f_2, g_1}(k) = F_2^*(k) \cdot G_1(k) = F_1(k) \cdot G_1(k) W_{2N}^k \tag{24}$$

$$R_{f_2, g_2}(k) = F_2^*(k) \cdot G_2(k) = F_1(k) \cdot G_1^*(k) \tag{25}$$

である (Appendix 1 参照).  $F_1(k)$ ,  $F_2(k)$ ,  $G_1(k)$  および  $G_2(k)$  は, それぞれ  $f_1(n)$ ,  $f_2(n)$ ,  $g_1(n)$ , および  $g_2(n)$  の DFT 係数である.

従って, 式 (22) および (25), 式 (23) および (24) から,

$$R_{f_1, g_1}(k) = R_{f_2, g_2}^*(k) \tag{26}$$

$$R_{f_1, g_2}(k) = R_{f_2, g_1}^*(k) \tag{27}$$

の関係を得る. また, クロススペクトル,  $R_{f_1, g_1}(k)$ ,  $R_{f_1, g_2}(k)$ ,  $R_{f_2, g_1}(k)$ ,  $R_{f_2, g_2}(k)$  に対応する相関関数を, それぞれ  $r_1(l)$ ,  $r_2(l)$ ,  $r_3(l)$ ,  $r_4(l)$  とすると,

$$r_1(l) = r_4(-l) \tag{28}$$

$$r_2(l) = r_3(-l) \tag{29}$$

と,  $r_1(l)$  と  $r_4(l)$ ,  $r_2(l)$  と  $r_3(l)$  が対称の関係にあることがわかる. ゆえに, DFT の線形性から,  $r_{f, g}(l)$  は,

$$r_{f, g}(l) = r_1(l) + r_2(l) + r_3(l) + r_4(l) \tag{30}$$

と, 式 (28) および (29) に示す対称性を持つ, 各相関関数の重ね合わせである.

### 3.2 各相関関数の出力範囲と分離可能な条件

3.1 で述べた各相関関数 ( $r_1(l)$ ,  $r_2(l)$ ,  $r_3(l)$ , および  $r_4(l)$ ) の出力範囲を求め,  $r_{f, g}(l)$  中における各相関関数の分離可能性, および分離可能となる条件を導く.

$s_1(n)$  および  $s_2(n)$  を  $M$  点信号とする.  $f_1(n)$  および

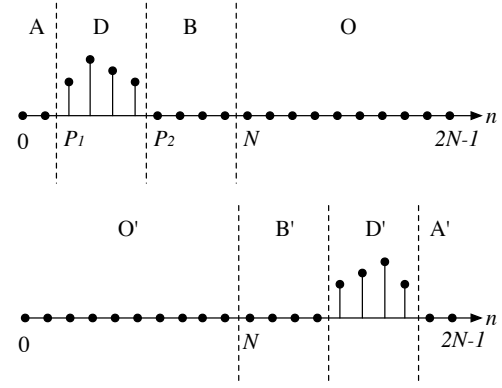


図 2: 四つの領域区分:  $f_1(n)$  (上),  $f_2(n)$  (下)

$g_1(n)$  を,

$$f_1(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, 1, \dots, P_1 - 1 \\ s_1(n - P_1), & n = P_1, P_1 + 1, \dots, P_2 - 1 \\ 0, & n = P_2, P_2 + 1, \dots, N - 1 \\ 0, & n = N, N + 1, \dots, 2N - 1 \end{cases} \tag{31}$$

$$g_1(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, 1, \dots, P_1 - 1 \\ s_2(n - P_1), & n = P_1, P_1 + 1, \dots, P_2 - 1 \\ 0, & n = P_2, P_2 + 1, \dots, N - 1 \\ 0, & n = N, N + 1, \dots, 2N - 1 \end{cases} \tag{32}$$

と定義しても一般性を失わない. ここで,  $P_1, P_2 \in \mathbb{Z}$ ,  $0 \leq P_1 < P_2 \leq N$ ,  $P_2 - P_1 = M$  である. 便宜上,  $n$  の範囲  $0 \leq n < P_1$ ,  $P_1 \leq n < P_2$ ,  $P_2 \leq n < N$ , および  $N \leq n < 2N$  を, それぞれ領域 A, D, B, および O とすると,  $P_1 = 0$  および  $P_2 = N$  のとき, それぞれ領域 A および B は存在しない. 図 2 に例を示す.

式 (4) より,  $r_1(l)$  は,

$$r_1(l) = \sum_{n=0}^{2N-1} f_1(n) g_1(((n+l))_{2N}) \tag{33}$$

と定義され, その値は,

$$r_1(l) = \begin{cases} x \in \mathbb{R}, & -\{(P_2 - P_1) - 1\} \leq l \leq P_2 - P_1 - 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{34}$$

となる. 式 (28) より,

$$r_4(l) = \begin{cases} x \in \mathbb{R}, & -\{(P_2 - P_1) - 1\} \leq l \leq P_2 - P_1 - 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{35}$$

を得る。従って、 $r_1(l)$  および  $r_4(l)$  の出力範囲は等しく、 $r_{f,g}(l)$  から、 $r_1(l)$  および  $r_4(l)$  を分離することはできない。

一方、 $r_2(l)$  は、式 (4) から、

$$r_2(l) = \sum_{n=0}^{2N-1} f_1(n)g_2(((n+l))_{2N}) \quad (36)$$

と定義され、その値は、

$$r_2(l) = \begin{cases} x \in \mathbb{R}, & -2P_2 + 1 \leq l \leq -2P_1 - 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (37)$$

となり、さらに、式 (29) より、

$$r_3(l) = \begin{cases} x \in \mathbb{R}, & 2P_1 + 1 \leq l \leq 2P_2 - 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (38)$$

を得る。

従って、式 (34), (35), (37), および (38) より、 $r_{f,g}(l)$  から  $r_3(l)$  および  $r_2(l)$  を分離する条件を求めることができる。まず、 $r_1(l)$  および  $r_3(l)$  の出力範囲を分離する条件は、式 (34) および (38) から、領域 D の個数  $M = P_2 - P_1$  に注意して、

$$\begin{aligned} P_2 - P_1 - 1 &< 2P_1 + 1 \\ \Leftrightarrow M - 1 &< 2P_1 + 1 \\ \Leftrightarrow \frac{M}{2} - 1 &< P_1 \end{aligned} \quad (39)$$

となる。つぎに、 $r_3(l)$  および  $r_2(l)$  の出力範囲を分離する条件は、式 (38) および (37) から、

$$\begin{aligned} 2P_2 - 1 &< N \\ \Leftrightarrow 2P_2 &\leq N \end{aligned} \quad (40)$$

となる。

式 (39) および (40) の二つの条件を満たす時、 $r_{f,g}(l)$  から  $r_3(l)$  および  $r_2(l)$  を得ることができる。すなわち、 $2N$  点の対称拡張した信号  $f(n)$  および  $g(n)$  から、 $r_3(l)$  および  $r_2(l)$  を得ることができる。

図 3(a) に、条件 (39) および (40) を満たすときの各相関関数  $r_1(l)$ ,  $r_2(l)$ ,  $r_3(l)$ , および  $r_4(l)$  の結果を示す。 $r_1(l)$  および  $r_4(l)$  の出力範囲は等しいが、 $r_2(l)$  および  $r_3(l)$  の出力範囲は分離されていることがわかる。図 3(b) は、 $r_{f,g}(l)$  を示している。

### 3.3 DCT 領域における計算

式 (12) より、クロススペクトル  $R(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$  は、

$$\begin{aligned} R(k) &= F^*(k)G(k) = \alpha_k^2 F_C(k)W_{2N}^{nk}G_C(k)W_{2N}^{-nk} \\ &= \alpha_k^2 F_C(k)G_C(k) \end{aligned} \quad (41)$$

と与えられる。ここで、 $F_{C_1}(k)$  および  $G_{C_1}(k)$  は、それぞれ  $f_1(n)$  および  $g_1(n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$  の  $N$  点 DCT 係数である。

$R(k)$  の  $2N$  点逆 DFT である  $r_{f,g}(l)$  は、その先頭  $0 \leq l \leq N-1$  において

$$r_{f,g}(l) = 2 \sum_{k=0}^{N-1} R(k) \cos\left(\frac{\pi lk}{N}\right) \quad (42)$$

と計算される (Appendix 2 参照)。

従って、式 (39) および (40) の条件を満たすとき、式 (42) に従い  $f(n)$  および  $g(n)$  の相関関数  $r_{f,g}(l)$  を求めると、 $0 \leq l \leq M-1$  において、 $r_1(l)$  と  $r_4(l)$  の加算結果を、 $2P_1+1 \leq l \leq 2P_2-1$  において、 $r_3(l) = r_2(-l)$  を得ることができる。ここで、 $r_3(n)$  は、 $f_2(n)$  および  $g_1(n)$  の相関計算であり、さらに、 $r_3(n)$  は、 $f_1(n)$  および  $g_1(n)$  の直線畳み込みであることに注意する (Appendix 3 参照)。

図 3 (c) に条件 (39) および (40) を満たすときの、DCT 領域において計算した相関関数  $r_{f,g}(l)$  を示す。 $r_3(l) = r_2(-l)$  を取得できることがわかる。

### 3.4 相関計算の取得

適切に  $f_1(n)$  および  $g_1(n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$  を生成することによって、所望する信号の相関計算結果を得ることが可能となる。

いま、 $M$  点信号  $s_1(n)$  および  $s_2(n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, M-1$  の相関計算  $r_{s_1,s_2}(l)$ ,

$$r_{s_1,s_2}(l) = \sum_{n=0}^{M-1} s_1(n)s_2(((n+l))_M) \quad (43)$$

を DCT 領域を用いて計算するには、 $f_1(n)$  および  $g_1(n)$  を

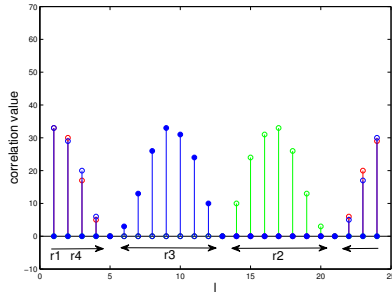
$$f_1(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, \dots, P_1 - 1 \\ s_1(M - (n - P_1) - 1), & n = P_1, P_1 + 1, \dots, \\ & P_1 + M - 1 \\ 0, & n = P_1 + M, \\ & P_1 + M + 1, \dots, N \end{cases} \quad (44)$$

$$g_1(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, 1, \dots, P_1 - 1 \\ s_2(n - P_1), & n = P_1, P_1 + 1, \dots, P_1 + M - 1 \\ 0, & n = P_1 + M, P_1 + M + 1, \dots, N \end{cases} \quad (45)$$

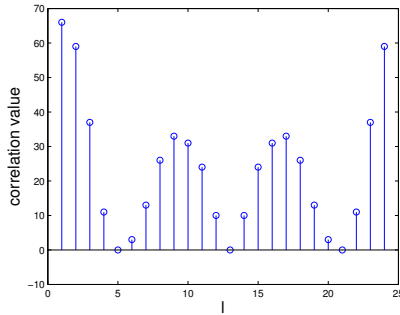
と生成し、式 (42) に従い、 $r_{f,g}(l)$  を求めることより、 $r_{s_1,s_2}(l)$ ,  $l = 0, 1, \dots, 2M-1$  は、

$$r_{s_1,s_2}(l) = r_{f,g}(l + M + 1) \quad (46)$$

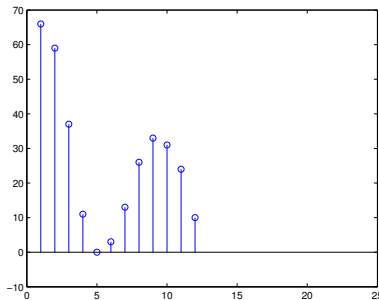
と与えられる。



(a) 各相関関数,  $r_1(l)$ ,  $r_2(l)$ ,  $r_3(l)$ ,  $r_4(l)$



(b) 相関関数  $r_{f,g}(l)$



(c) DCT 領域における相関計算  $r_{f,g}(l)$

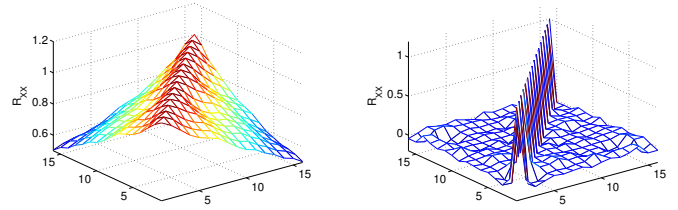
図 3: 対称拡張信号の相関関数 ( $M = 4$ ) . 条件 (39) および (40) を満たす

#### 4 白色化信号の効果

これまで、信号に零値を適切に挿入することにより、DCT 領域において相関計算が可能であることを示してきた。ここでは、信号を白色化することにより、零値を挿入せずに、DCT 領域において相関計算が可能となることを示す。

いま、式 (15) および (16) の  $f(n)$  および  $g(n)$  が白色化された信号であると仮定する。このとき、 $r_2(l)$  および  $r_3(l)$  の値はすべて零値となり、 $r_1(l)$  および  $r_4(l)$  のみ値が得られることになる。

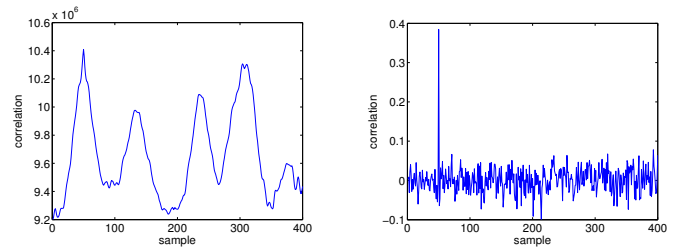
擬似白色化として、DCT 係数の正負符号を用いることを提案する。自然画像は一般に一次自己回帰過程とされ、その相関係数  $\rho$  は、水平垂直方向共に 1 に近い値となるこ



(a) 原画像  $\rho = 0.96$

(b) 擬似白色化画像

図 4: 相関係数行列



(a) 原信号

(b) 擬似白色化信号

図 5: 相関計算

とが知られている。一方、白色信号の相関係数行列は単位行列となる。図 4(a) および 4(b) に原画像および擬似白色化画像の相関係数行列を示す。原画像は Lena,  $512 \times 512$ , 8bits/pixel を用いた。原画像では、 $\rho = 0.96$  であった。一方、擬似白色化画像は、原画像の DCT 係数の正負符号を逆 DCT することにより得た。擬似白色化画像の相関行列係数と単位行列との差の平均および分散は  $0.0246$  および  $6.44 \times 10^{-4}$  であった。DCT 係数の正負符号を用いることは擬似白色化として有効であることがわかる。

図 5(a) および (b) に DCT 領域において零挿入を行わないときの原信号および擬似白色化信号の相関計算結果をそれぞれ示す。Lena の 1 ラインから、二つの 50 サンプルシフトさせた信号を生成し、これを原信号とした。擬似白色化により信号間のシフト量を表す位置のみにピークが現れることがわかる。

#### 5 おわりに

DCT 領域における相関計算法を提案した。対称に拡張した信号の相関関数に着目し、その出力範囲から零値の挿入位置の条件を求めた。この解析に基づき、信号の白色化を仮定できる場合には、零値の挿入なしに、相関計算を行えることを示した。擬似白色化として、DCT 係数の正負符号の抽出を提案し、その効果を確認した。

## Appendix 1

$2N$  点信号  $f_2(n)$  の  $2N$  点 DFT,  $F_2(k)$  は,  $F_1(k)$  を用いて

$$\begin{aligned} F_2(k) &= \sum_{n=0}^{2N-1} f_2(n)W_{2N}^{nk} = \sum_{n=0}^{2N-1} f_1(2N-n-1)W_{2N}^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{2N-1} f_1(n)W_{2N}^{(2N-n-1)k} = \sum_{n=0}^{2N-1} f_1(n)W_{2N}^{(-n-1)k} \\ &= W_{2N}^{-k} \sum_{n=0}^{2N-1} f_1(n)W_{2N}^{n(-k)} \\ &= F_1(-k)W_{2N}^{-k} = F_1^*(k)W_{2N}^{-k} \end{aligned} \quad (47)$$

と表現される. 同様に  $G_2(k) = G_1^*(k)W_{2N}^{-k}$  を得る.

## Appendix 2

$R(k)$  の  $2N$  点逆 DFT,  $r(l)$  は, 以下のように展開される.

$$\begin{aligned} r(l) &= \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{2N-1} R(k)W_{2N}^{-lk} \\ &= \frac{1}{2N} \left( \sum_{k=0}^{N-1} R(k)W_{2N}^{-lk} + \sum_{k=N}^{2N-1} R(k)W_{2N}^{-lk} \right) \\ &= \frac{1}{2N} \left( \sum_{k=0}^{N-1} R(k)W_{2N}^{-lk} + \sum_{k=1}^N R^*(k)W_{2N}^{lk} \right) \end{aligned} \quad (48)$$

ここで,  $R(k) = R^*(k)$  から,

$$\begin{aligned} r(l) &= \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} R(k)(W_{2N}^{-lk} + W_{2N}^{lk}) \\ &\quad - \frac{1}{2N} R(0) + \frac{1}{2N} R(N)W_{2N}^{lN} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} R(k) \cos\left(\frac{\pi lk}{N}\right) - \frac{1}{2N} R(0) \end{aligned} \quad (49)$$

となる. さらに,  $R(N) = 0$  となることに注意して, 式 (41) より,

$$\begin{aligned} r(l) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k^2 F_C(k) G_C(k) \cos\left(\frac{\pi lk}{N}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2N} \alpha_0^2 F_C(0) G_C(0) \\ &= 2 \sum_{k=0}^{N-1} F_C(k) G_C(k) \cos\left(\frac{\pi lk}{N}\right) \end{aligned} \quad (50)$$

を得る.

## Appendix 3

$f_1(n)$  と  $g_1(n)$  の畳み込みを  $c_{f_1, g_1}(l)$  とすると,

$$\begin{aligned} r_3(l) &= \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{2N-1} F_2^*(k) \cdot G_1(k) W_{2N}^{-lk} \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{2N-1} F_1(k) G_1(k) W_{2N}^{-(l-1)k} \\ &= c_{f_1, g_1}(l-1) \end{aligned} \quad (51)$$

を得る. 式 (29) より,

$$r_2(l) = c_{f_1, g_1}(-l-1) \quad (52)$$

を得る.

## 参考文献

- [1] 伊藤 泉, 藤吉 正明, 貴家 仁志, “DCT 係数の正負符号と位相限定相関との関係について,” 信学論 (A), vol.J90-A, no.7, pp.567–577, July 2007
- [2] I.Ito and H.Kiya, “DCT sign-only correlation with application to image matching and the relationship with phase-only correlation,” in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech and Signal Process.*, vol.I, pp.1237-1240, Apr. 2007
- [3] I. Ito and H. Kiya, “Multiple-Peak Model Fitting Function for DCT Sign Phase Correlation with Non-Integer Shift Precision,” in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech and Signal Processing*, pp. 449–452, Apr. 2009
- [4] I.Ito and H.Kiya, “Symmetric Correlation and Its Properties,” in *Proc. EURASIP European Signal Processing Conference*, pp.1301–1305, Aug. 2010
- [5] H. Kiya, K. Nishikawa, and M. Iwahashi, “A development of symmetric extension method for subband image coding,” *IEEE Trans. Image Process.*, vol.3, no.1, Jan. 1994
- [6] S. A. Martucci, “Symmetric convolution and the discrete sine and cosine transforms,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol.42, no.5, May 1994
- [7] A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer, and J. R. Buck, *Discrete-time Signal Processing*, Prentice Hall, 1999
- [8] K.R.Rao and P.Yip, *Discrete Cosine Transform*, Academic Press. Inc., 1990