第27回信号処理シンポジウム
ANAインターコンチネンタル石垣リゾート
2012年11月28 日〜11月30日

スパース表現を用いたセキュアな顔認識システム

A Secure Face Recognition System Based on Sparse Representation

村木雄一　　藤吉正明　　貴家仁志
首都大学東京大学院　システムデザイン研究科 情報通信システム学域

Yuichi MURAKI　　Masaaki FUJIYOSHI　　Hitoshi KIYA
Information and Communication Systems, Tokyo Metroporitan University

アブストラクト　情報流出などの際に視覚的な認識を困難にし，個人情報を保護できる顔認識システムを提案する．提案法は先行研究であるスパース表現を用いた顔認識法に基づき，トレーニング画像およびクエリ画像に対して，ランダム行列の加算およびクリッピングを施す手法を提案する．十分な不可視化効果を維持しつつ，その効果を有しない先行研究と同程度の認識率を持つことを確認した．

1　はじめに

現在，顔認識は固有顔を用いた主成分分析 [1] や局所的特徴方式 [2] などの局所的な特徴を用いて識別する方式と，グラフマッチング法 [3] やニューラルネット方式 [4] などの全体的な特徴を用いた方式などがある．これらは，精度，速度共に向上し続けているが，これらの識別法はノイズやサングラスなどで顔を覆われると識別率が低下するという問題点がある．それに対して，このような破損や閉塞に強いスパース表現を用いた顔認識法 [5] が注目されている．

近年，一般に大量の個人情報の保存において，情報流出の際のプライバシー侵害への対策が責務になっている．このような研究は暗号鍵を用いてデータを保護する方法が一般的であるが，鍵の管理や配送，認識する際には暗号を解除する必要があるなどの課題がある．また，準同型の使用を前提に暗号化された領域で様々な処理を行う研究がある [6]．しかし，一般に公開鍵の使用が必要となり処理負担が大きい．さらに，適用可能なアルゴリズムが限定され，顔認識への応用は発表されていない．また画像の視覚的情報を保護しつつ，画像マッチングを実行する研究 [7],[8] もされているが，顔識別への応用は難しい．

本稿では，ノイズに強いスパース表現を用いた顔認識法を用いてセキュアな顔認識システムを提案する．具体的には，データベース内の顔画像にランダム行列を全画素において加算し, 視覚的に個人の特定を困難にする．その後クリッピング処理を施すことでランダム行列を公開しても，視覚的復元を困難にする．また提案法には，暗号鍵の管理や配送，暗号の解除などの処理も必要ない．さらに，識別率もランダム行列加算前とほぼ同等の結果を確認できた．

2　ℓ^1 ノルム最適化と顔認識法

ここでは，提案法の基礎となる顔識別法を簡単に説明する [5].

2.1　テストサンプルの線形和表現

パターン認識の基本問題は，クラス毎にラベル付けされたサンプル (トレーニングサンプル:$V_{i,j} \in \mathbb{R}^{W\times H}$) を用いた，新しく提示されたサンプル (テストサンプル:$Y \in \mathbb{R}^{W\times H}$) のクラス分類にある．本手法では行列 $V_{i,j}$，Y をそれぞれ列を積み重ねることで $\boldsymbol{v_{i,j}} \in \mathbb{R}^M$，$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^M$ のようにベクトル化して使用する．ただし，M=W*H である．まず，i 番目のクラスに所属する N_i 個のトレーニングサンプルを行列 $A_i = [\boldsymbol{v}_{i,1}, \boldsymbol{v}_{i,2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i,N_i}] \in \mathbb{R}^{M\times N_i}$ の列として用意する．このとき i 番目のクラスのトレーニングサンプルの数 N_i が十分与えられた場合，i 番目のクラスに属するテストサンプル$\boldsymbol{y}$は, $\boldsymbol{v}_{i,j}$ の線形和で近似される．

$$\boldsymbol{y} = \alpha_{i,1}\boldsymbol{v}_{i,1} + \alpha_{i,2}\boldsymbol{v}_{i,2} + \cdots + \alpha_{i,N_i}\boldsymbol{v}_{i,N_i} \tag{1}$$

ただし，$\alpha_{i,j} \in \mathbb{R}$ である．次にすべてのトレーニングサンプルを用いて新しい行列 A を次式により定義する．

$$A = [A_1, A_2, \ldots, A_K] = [\boldsymbol{v}_{1,1}, \boldsymbol{v}_{1,2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{K,N_K}], \in \mathbb{R}^{M\times N} \tag{2}$$

ここで，K はトレーニングサンプルのクラスの数，$N = N_1 + N_2 + \cdots + N_K$ である．このときテストサンプル $\boldsymbol{y}$ とすべてのトレーニングサンプルの関係は次式により与えられる．

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}_0, \in \mathbb{R}^M \tag{3}$$

ただし

$$\boldsymbol{x}_0 = [0, \ldots, 0, \alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \ldots, \alpha_{i,N_i}, 0, \ldots, 0]^T, \in \mathbb{R}^N \tag{4}$$

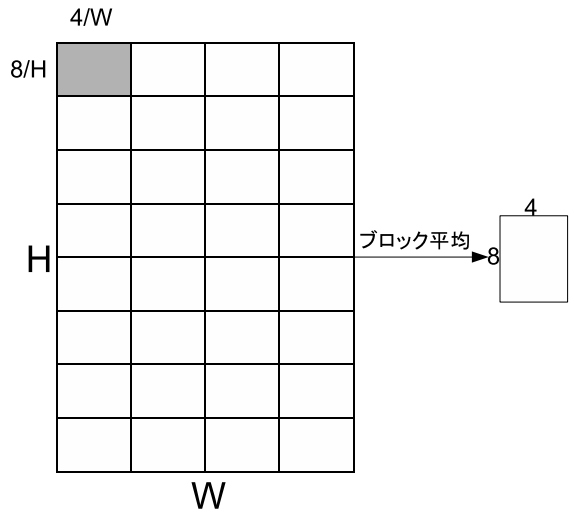


図 1: 特徴抽出法

であり，i 番目のクラス以外の要素はすべて 0 となる．今，画像サイズを W*H とすると，一般に次元 M は $M = W*H$ となり，直接的解法では非常に大きい値となる．

2.2 次元の低減と特徴量抽出

一般には画像から特徴量を抽出して，次元 M を下げる必要がある．ここで式 (3) から

$$\boldsymbol{y}_L = L(\boldsymbol{y}) = L(A\boldsymbol{x}_0), \in \mathbb{R}^D \tag{5}$$

と表す. ただし，D は $D < M$ となる新たな次元であり，L は特徴抽出操作をあらわす．本稿では，図 1 に示すように，サイズ W*H 画像を 8*4 のブロックに分割し，ブロックごとに平均を取って，W*H 次元を D=8*4=32 次元に縮小して識別に使用する．また特徴抽出の方法は Eigenfaces[1], Fisherfaces[9]，Laplacianfaces[10] やランダム抽出，などがあるが，どれを用いても識別精度にあまり変化はないことが確認されている [5].

2.3 ℓ^1 ノルム最適化による解法

式 (3) の解法において顔認識の場合一般に $M < N$ となり，未知数の数が方程式の数より多くなってしまう．

そこで ℓ^2 ノルム最適化

$$\hat{\boldsymbol{x}_2} = \arg\min \|\boldsymbol{x}\|_2, \text{subject} \quad \text{to} \quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \tag{6}$$

はその解法の一つである．しかし，ℓ^2 ノルム最適化では解に非ゼロの数が多く，異なったクラスに対応する要素も非ゼロになってしまうことが知られている．そのため式 (3) の解法に ℓ^2 ノルム最適化は適さない．

そこで ℓ^0 ノルム最適化

$$\hat{\boldsymbol{x}_0} = \arg\min \|\boldsymbol{x}\|_0, \text{subject} \quad \text{to} \quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \tag{7}$$

を使用することで最もスパースな解を得ることができる．実際 ℓ^0 ノルム最適化は非ゼロ要素が M/2 以下なら $\hat{\boldsymbol{x}_0}$ は唯一のスパースな解を求められることが知られている [11]. しかし，ℓ^0 ノルム最適化は NP 困難となってしまう．

そのため ℓ^1 ノルム最適化

$$\hat{\boldsymbol{x}_1} = \arg\min \|\boldsymbol{x}\|_1, textsubject \quad to \quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \tag{8}$$

が有効な最適化となる．ℓ^1 ノルム最適化はその解 $\hat{\boldsymbol{x}_1}$ が十分にスパースな場合 ℓ^0 ノルムの解と同じ解になる [12],[13],[14]．また線形計画法で簡単に実装することができ，多項式時間で計算可能である [15]．ℓ^1 ノルム最適化は上記の技術に加え，ノイズやデータ破損に対してすぐれた耐性を有する．

2.4 ℓ^1 ノルム最適化のノイズ耐性

実際の画像はノイズが乗っていることが多いためテストサンプル $\boldsymbol{y}$ を式 (1) で近似できないことがある．そこで式 (3) を次式のように修正する．

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{z} \tag{9}$$

ここで，$\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^M$ ($\|\boldsymbol{z}\|_2 \leq \epsilon$) を微小のノイズとする．これを用いて，$\boldsymbol{x}_0$ は式 (8) を次のように変形することでノイズが存在しても，スパースな解に近似できる．

$$\hat{\boldsymbol{x}_1} = \arg\min \|\boldsymbol{x}\|_1, \text{subject to } \|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2 \leq \epsilon \tag{10}$$

この解法は凸計画問題の解に帰着する [15]．さらに，微小なノイズ z 以外の外乱に対しても耐性を有する．

2.5 閉塞と破損

実際の顔識別では，テストサンプルはサングラスなどで部分的に閉塞していたり破損していることが多い．そのため，式 (3) は次のように拡張された [5].

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_0 \in \mathbb{R}^M \tag{11}$$

このとき $\boldsymbol{e}_0$ の非ゼロの要素は$\boldsymbol{y}$の閉塞または破損部分に対応する．また $\boldsymbol{e}_0$ の非ゼロ要素は $\boldsymbol{e}_0$ 全体に対して少ないと仮定される．しかし，その非ゼロ要素の値は小さくはないため，2.4 の最適化手法による対応は困難となる．

今，$B = [A,\ I] \in \mathbb{R}^{M\times(N+M)}, \boldsymbol{w}_0 = [\boldsymbol{x}_0\ \boldsymbol{e}_0]$ と置くと式 (11) は

$$\boldsymbol{y} = [A,\ I] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{e}_0 \end{bmatrix} = B\boldsymbol{w}_0 \tag{12}$$

と書き換えることができる．また，特徴抽出過程の線形性保持の仮定の下，次元削減すると式 (11) は

$$\boldsymbol{y}_L = L(A\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{e}_0), \in \mathbb{R}^D \tag{13}$$

$$= L(A\boldsymbol{x}_0) + L(\boldsymbol{e}_0), \in \mathbb{R}^D \tag{14}$$

と修正される．そのため

$$\boldsymbol{y}_L = ([A_L,\ I] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_L \\ \boldsymbol{e}_L \end{bmatrix}) = B_L \boldsymbol{w}_L, \in \mathbb{R}^D \tag{15}$$

とあらわされる．よって，

$$\hat{\boldsymbol{w}_L} = \arg\min \|\boldsymbol{w}_L\|_1, \text{ subject to } B_L \boldsymbol{w}_L = \boldsymbol{y}_L \tag{16}$$

を解くことで解を得ることができる．また，図 1 の次元削減は，線形性を有する．従って，上述の解法が可能となる．

3 提案法

提案法では，2.2 で述べた従来法に対して 2 つの拡張が実行される．

1. トレーニングサンプル $V_{i,j}$ にランダム行列 $R \in \mathbb{R}^{W \times H}$ を全ての画素で加算する．

   ただし $i = 1, 2, \ldots, K$ $j = 1, 2, \ldots, N_K$ である．

2. トレーニングサンプル $V_{i,j}$ の全画素値を [0 255] でクリッピングする．

その後，トレーニングサンプル $V_{i,j}$ を 8*4 ブロックに分割してブロックごとに平均を取り，次元削減を行う．

3.1 ランダム行列の加算

まず顔画像の視覚的な認識を困難にするため，トレーニングサンプル $V_{i,j}$ にランダム行列 R を全ての画素で加算する．ランダム行列はすべて同じである．今，ランダム行列 R の列を積み重ねることでベクトル化 ($\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^M$) する．このとき，ランダム行列がすべて等しいため，式 (1) より

$$\boldsymbol{y}+\boldsymbol{R} = \beta_{i,1}(\boldsymbol{v}_{i,1}+\boldsymbol{R})+\beta_{i,2}(\boldsymbol{v}_{i,2}+\boldsymbol{R})+\cdots+\beta_{i,n_i}(\boldsymbol{v}_{i,n_i}+\boldsymbol{R}) \tag{17}$$

と近似できる. これはランダム行列 R の加算が両辺の関係に対して相対的に影響しないからである．そのため式 (11) は

$$\boldsymbol{y} + \boldsymbol{R} = A_R \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{e}_0 \tag{18}$$

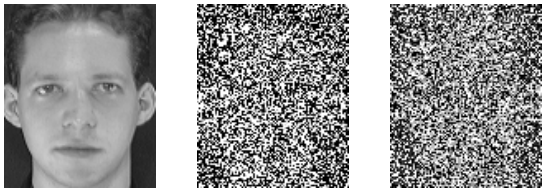
と表すことができる．ただし，$A_R = [\boldsymbol{v}_{1,1} + \boldsymbol{R}, \boldsymbol{v}_{1,2} + \boldsymbol{R}, \ldots, \boldsymbol{v}_{k,n_k} + \boldsymbol{R}]$ である．式 (12) より式 (18) は

$$\boldsymbol{Y} = [A_R,\ I] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{e}_0 \end{bmatrix} = B_R \boldsymbol{w}_0 \tag{19}$$

と書き換えることができる．ただし，

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{R} \tag{20}$$

$$B_R = [A_R\ I] \tag{21}$$



(a) (b) (c)

図 2: (a) テストサンプル (b) テストサンプルにランダム行列を全画素で加算後クリッピングした画像 (c)(b) の画像から同じランダム行列を減算した画像

とする．よって

$$\hat{\boldsymbol{w}_0} = \arg\min \|\boldsymbol{w_0}\|_1, \text{ subject to } B_R \boldsymbol{w}_0 = \boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^M \tag{22}$$

を解くことで識別することができる．この結果より，ランダム行列 R を加算しなかった場合の結果と上述の結果は原理的に一致することがわかる．

3.2 クリッピング

次に，クリッピングについて説明する．ランダム行列を加算するのみだと，もし加算したランダム行列を公開した場合, 加算された行列をそのまま減算することで y+R から y を容易に推定されてしまう．そのためランダム行列を加算した画像を [0 255] でクリッピングをする．クリッピングによる変化を行列 $c \in \mathbb{R}^{W*H}$ であらわす．このとき

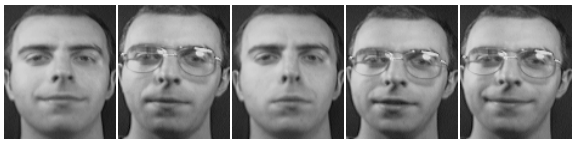
$$y + R + c - R \neq y \tag{23}$$

である．従って，ランダム行列を公開しても，y の復元は困難となる．図 2(a)，2(b) および 2(c) にテストサンプル，ランダム行列を加算後クリッピングした画像，ランダム行列を加算後クリッピングした画像から同じランダム行列を減算した画像を示す.

行列 c の列を積み重ねることでベクトル化しトレーニングサンプルごとのクリッピングによる変化を $\boldsymbol{c_{i,j}} (\in \mathbb{R}^M)$ とする．ただし，$i = 1, 2, \ldots, K \quad j = 1, 2, \ldots, N_K$ である．行列 c の非ゼロ要素は行列全体に対して少ない．すなわち，$\|c\|_0$ の値が小さいと仮定すると，式 (17) と同様に両辺の相対的な距離関係に c がわずかしか影響を与えないので，このとき

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} + \boldsymbol{R} + \boldsymbol{c}_y =& \gamma_{i,1}(\boldsymbol{v}_{i,1} + \boldsymbol{R} + \boldsymbol{c}_{1,1}) \\ &+ \gamma_{i,2}(\boldsymbol{v}_{i,2} + \boldsymbol{R} + \boldsymbol{c}_{1,2}) \\ &+ \cdots \\ &+ \gamma_{i,n_i}(\boldsymbol{v}_{i,n_i} + \boldsymbol{R} + \boldsymbol{c}_{k,n_i}) \end{aligned} \tag{24}$$

と近似することができる．ただし，テストサンプル $\boldsymbol{y}$ におけるクリッピングによる変化をベクトル $\boldsymbol{c}_y$ とする．また，



(a) テストサンプル

(b) トレーニングサンプル

図 3: テストサンプル，トレーニングサンプルの例

$A_{Rc} = [\boldsymbol{v}_{1,1}+R+\boldsymbol{c}_{1,1}, \boldsymbol{v}_{1,2}+R+\boldsymbol{c}_{1,2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{k,n_k}+R+\boldsymbol{c}_{k,n_k}]$ とすると

$$\boldsymbol{y} + \boldsymbol{R} + \boldsymbol{c}_y = A_{Rc}\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{e}_0 \tag{25}$$

と表すことができる．

また，式 (12) より式 (25) は，

$$\boldsymbol{Y}_c = [A_{Rc},\ I] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{e}_0 \end{bmatrix} = B_{Rc}\boldsymbol{w}_0 \tag{26}$$

と書き換えることができる．ただし，

$$\boldsymbol{Y}_c = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{R} + \boldsymbol{c} \tag{27}$$

$$B_{Rc} = [A_{Rc}\ I] \tag{28}$$

である．よって 3.1 と同様に

$$\hat{\boldsymbol{w}}_0 = \arg\min \|\boldsymbol{w_0}\|_1, \text{ subject to } B_{Rc}\boldsymbol{w}_0 = \boldsymbol{Y}_c \in \mathbb{R}^M \tag{29}$$

を解くことで識別することができる．この結果より，$\|c\|_0$ の値が小さければランダム行列を加算しなかった場合と，ほぼ同等な識別精度になる．

4 実験と評価

40 人 (K=40) 各 10 枚, 計 400 枚の顔画像を用いて実験を行った．図 3(a)，3(b) のように，各人 10 枚の画像において，5 枚をテストサンプルとして使用して, 残りの 5 枚 (N=5) をトレーニングサンプルとして使用する．よってテストサンプル計 200 枚, トレーニングサンプル計 200 枚 (N*K=200) である．今回はランダム行列 R に $[-s\ s]$ の一様分布を用いた．なお，$s = 0, 100, 200, 300, \ldots, 9900, 10000$ である．テストサンプルがトレーニングサンプル内の 40 クラス (人) のどのクラスに所属するかを調べる．テストサンプル 200 枚中，何枚正解したかで識別率を算出する．またこの実験では 2.2 で記述した次元削減法を用いて行っている．

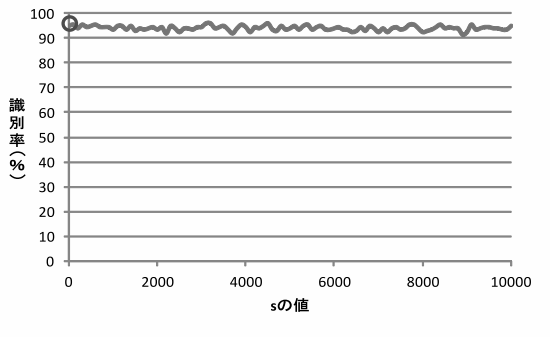


図 4: 識別率と s の関係 (クリッピングなし)

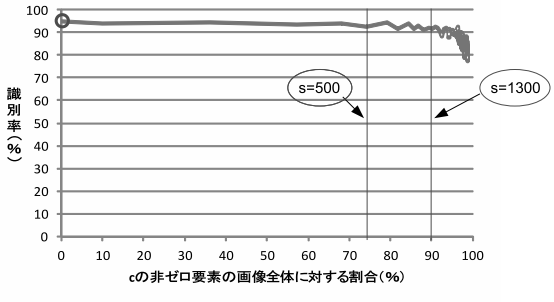


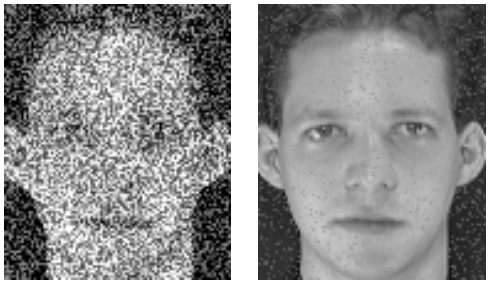
図 5: 識別率と $\|c\|_0$ の画像に対する割合の関係 (クリッピングあり)

4.1 実験 1:ランダム行列の加算

まず，3.1 で述べたように，画像にランダム行列を加算した式 (19) の場合の識別率と s の値の関係を調べる．結果を図 4 に示す．なお，$s = 0$ のときランダム行列が加算されていない場合の識別率である．図 4 より，s の値が大きくなっても識別枚数にあまり変わりがないことがわかる．そのため，ランダム行列の値に関わらず，ランダム行列の加算なしの場合とほぼ同等の精度で識別できていることが分かる．

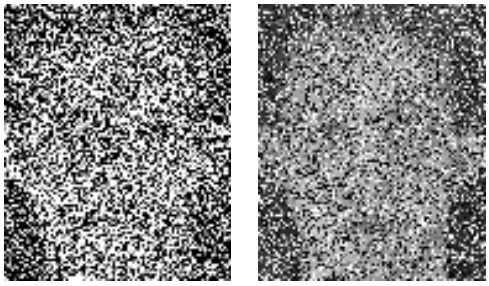
4.2 実験 2:クリッピング

次に 3.2 で述べた，画像にランダム行列を加算した後にクリッピングを行った式 (26) の場合の識別率と $\|c\|_0$ の画像全体に対する割合 (クリッピングによる影響を受けた画素の割合) の関係を調べる．結果を図 5 に示す．なお，$\|c\|_0$ の画像に対する割合が 0% のとき，ランダム行列が加算されていない場合の識別率である．$\|c\|_0$ の画像全体に対する割合がおよそ 90% までは識別枚数に変化はあまり見られないが，90% を超えると識別率が非常に低下す



(a) y+R+c (b) y+R+c-R

図 6: クリッピングの不可視覚効果 ($\|c\|_0$ の割合約 10%)



(a) y+R+c (b) y+R+c-R

図 7: クリッピングの不可視覚効果 ($\|c\|_0$ の割合約 50%)

ることがわかる.

4.3 実験 3:視覚的な認識

ランダム行列を画像に加算した際に,$\|c\|_0$ の画像全体に対する割合がどの程度の大きさなら人間が視覚的に人物を特定できなくなるかを検証する. その結果を図 6(a), 6(b), 7(a), 7(b), 8(a) および 8(b) に示す. これらはそれぞれ, $\|c\|_0$ の画像全体に対する割合が約 10%, 約 50%, 約 75% の場合において

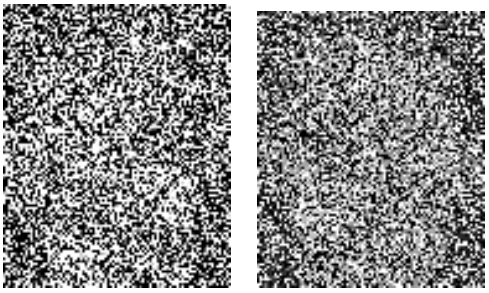
(a) テストサンプルにランダム行列を全画素で加算後クリッピングした画像

(b)(a) の画像から同じランダム行列を減算した画像

の処理結果である. $\|c\|_0$ の画像全体に対する割合が 50% あれば十分な不可視化効果が確認できる.

5 結論

本稿ではスパース表現を用いたセキュアな顔識別法を提案した. データベース内の顔画像にランダム行列を加算し, 顔画像を視覚的に個人の特定を不可能にする. その後クリッピングをかけることで万が一, ランダム行列を知られても個人を特定できなくすることで安全性が増した. また, 加算するランダム行列にある程度の制約があるが, 識別率もあまり下がらず識別する際に, 暗号化を解くなどの手間を加える必要がない.



(a) y+R+c (b) y+R+c-R

図 8: クリッピングの不可視覚効果 ($\|c\|_0$ の割合約 75%)

参考文献

[1] M. Turk and A .Pentland,"Eigenfaces for Recognition" *Proc. IEEE Int'l Conf. Computer Vision and Pattern Recognition*, 1991

[2] P. Penev and J. Atick "Local feature Analysis : a General Statistical Theory for Object Representation" *Network: Computation in Neural Systems,*, pp.477–500, Mar.,1996

[3] L. Wiskott,J. Fellous,N. Kruger, and C. von der Malsburg: "Face Recognition by Elastic Bunch Graph Matching" *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 19, No. 7, pp.775–779, July.,1997

[4] P. Latha, L. Ganesan and S. Annadurai " Face Recognition using Neural Networks" *Signal Processing: An International Journal*, Vol. 3, No. 5, pp.328–340, Mar.,2005

[5] J. Wright,A.Y. Yang, A. Ganesh, S.S. Sastry and YiMa, "Robust Face Recognition via Sparse Representation" *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 31, No. 2, Feb.,2009

[6] Hitoshi Kiya and Masaaki Fujiyoshi, "Signal and Image Processing in the Encrypted Domain," *ECTI Transactions on Computer Engineering, Computer and Information Technology,* vol.6, no.1, pp.11–18, May 2012.

[7] Izumi Ito and Hitoshi Kiya, "Phase-Only Correlation Based Matching in Scrambled Domain for Preventing Illegal Matching," *LNCS Transactions on Data Hiding and Multimedia Security V*vol.6010/2010, pp.51–69, June 2010.

[8] Izumi Ito and Hitoshi Kiya, "One-Time Key Based Phase Scrambling for Phase-Only Correlation between Visually Protected Images," *EURASIP J. Information Security*, vol.2009, no.841045, January 2010.

[9] P. Belhumeur, J. Hespanda, and D. Kriegman, "Eigenface versus Fisherfaces:Recognition Using Class Specific Linear Projection," *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 19, No. 7, pp.711–720, July., 1997

[10] X. He, S. Yan, Y. Hu, P. Niyogi, and H. Zhang, "Face Recognition Using Laplacianfaces," *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 27, No. 3, pp.328–340, Mar.,2005

[11] D. Donoho and M. Elad、"Optimal Sparse Representation in General(Nonorthogonal)Dictionaries via ℓ^1Minimization" *Proc. Nat'l Academy of Sciences* , pp.2197–2202, Mar, 2003

[12] D. Donoho、"For Most Large Underdetermined System of Linear Equations the Minimal l_1-Norm Solution Is Also the Sparest Solution" *Comm. Pure and Applied Math.*, Vol. 59, No. 6, pp.797–829,2006

[13] E. Candes,J. Romberg, and T.Tao,"Stable Signal Recovery from Incomplete and Inaccurate Measurements," *Comm.Pure and Applied Math.*, Vol. 59, No. 8, pp.1207–1223, 2006

[14] E. Candes and T. Tao,"Near-Optimal Signal Recovery from Random Projections:Universal Encoding Strategies?" *IEEE Trans. Information Theory*, Vol. 52, No. 12, pp.5406–5425, 2006

[15] S. Chen, D. Donoho, and M. Saunders, "Atomic Decomposition by Basis Persuit," *SIAM Rev.*, Vol. 43, No. 1, pp.129–159, 2001