

画像アライメントを目的とした 2次元相互相関関数の補助関数法に基づく最大化 2D Cross-Correlation Maximization Based on Auxiliary Function Method for Image Alignment

木下裕磨[†]

山岡洗瑛[‡]

貴家仁志[‡]

[†]東海大学

[‡]東京都立大学

Yuma KINOSHITA[†]

Kouei YAMAOKA[‡]

Hitoshi KIYA[‡]

[†]Tokai University

[‡]Tokyo Metropolitan University

アブストラクト 本論文では、画像信号処理とコンピュータビジョンにおける基本タスクである画像アライメントのために、2次元相互相関関数の最大化アルゴリズムを提案する。相互相関ベースの画像アライメント法は、その高速さから処理速度が重視される応用においてしばしば使用される。しかしながら、画像アライメントには通常、連続的な相互相関関数の最大化が必要とされ、既存手法はその計算速度や精度に制限がある。この課題に対応するため、本論文では2次元相互相関関数を補助関数法により最大化するアルゴリズムを提案する。我々のアプローチでは、1次元信号のために山岡らが提案したアルゴリズムを拡張し、2次元相互相関関数を直接最大化する代わりに相互相関を下から抑える補助関数を最大化する。シミュレーション実験により、提案法の精度と処理速度を3つの既存手法と比較した。実験の結果、画像のシフト量推定精度の点で、2次元曲面当てはめよりも提案法の優越性が示される。加えて、提案法は、勾配上昇法と黄金分割探索と比較してそれぞれ約6.8倍と4倍高速である上、非反復的な2次元曲面当てはめの速度と競合することが示される。

1 はじめに

画像アライメント、あるいは、画像マッチングは、画像信号処理やコンピュータビジョンにおける基本的な問題である。パノラマ画像の作成 [1] や、医用画像処理 [2]、画像ベースの3Dモデリング [3]、高ダイナミックレンジ画像撮影 [4]、[5] など、画像の事前アライメントは、多くのタスクで必要とされる。その必要性から、これまでにさまざまな画像アライメント手法が提案されている。

画像アライメントには、射影変換等の幾何変換に基づく手法と画素強度に基づく手法の2つの主要なアプローチがある。前者の方法は、SIFT [6]、SURF [7]、A-KAZE [8]

などの特徴を利用して、一方の画像から他方の画像への幾何変換を表す変換行列を推定することを目指す。変換行列の推定には、しばしばRANSAC [9]が使用される。近年の研究では、深層学習を使用して変換行列を推定する手法も検討されている [10]、[11]。画素強度に基づく手法の多くは、オプティカルフローの推定に焦点を当てている [12]–[15]。しかし、これらの手法においては、変換行列やオプティカルフローの推定に高い計算コストがかかる問題がある。

このような制約のため、携帯端末における画像撮影 [5]等の処理速度が重要視される応用においては、2次元相互相関に基づく画像アライメント手法がよく使用される [16]、[17]。これらの手法は、2枚の画像間の2次元相互相関関数を最大化することで、画像のシフト量を推定することを目指す。シフト量が離散の場合には、相互相関関数を高速フーリエ変換 (fast Fourier transform) により高速に計算でき、その最大点を高速に見つけることができる。

しかし、画像のシフト量は一般に実数値を取り、その推定には連続の相互相関関数をサブピクセル精度で最大化する必要がある。これを最大化する閉形式の解は、未だ見つかっていない。相互相関関数をサブピクセル精度で効率的に最大化するため、反復的なアルゴリズムや近似ベースの解法が設計されてきたが、これらは計算速度や精度に制限がある。たとえば、文献 [5]においては、2次元相互相関関数のサブピクセル単位での最大化を、Coarse-to-fine法と2次元曲面当てはめによる近似を用いて解く方法が利用されている。この方法は、スマートフォン等の携帯端末上で高速計算可能であるが、その精度は限られている。

このような背景から、我々は、連続の2次元相互相関関数を高速かつ正確に最大化するアルゴリズムを開発す

ることを目指す。音響信号処理分野において山岡らは、補助関数法、または Majorization-Minimization (MM) アルゴリズムとして知られるアプローチにより、通常の相互相関や位相限定相関 [18] を含む一般化 1 次元相互相関関数を最大化するための高速かつ正確なアルゴリズムを提案している [19]。我々は、山岡らの方法を拡張し、一般化 2 次元相互相関関数を最大化するアルゴリズムを導出する。提案法は、目的関数の下界となる 2 次の補助関数を最大化する操作を反復することで、目的関数の局所的な最大値を求められる。2 次関数の最大化問題は解析的に解くことができるため、提案法は高速に計算できる。加えて、提案法の反復で得られる点列は、目的関数を単調増加させることが保証できる。

提案法による相互相関関数最大化の精度と計算速度を評価するため、シミュレーション実験を実施した。相互相関関数最大化の比較手法としては、バックトラック直線探索を用いる勾配上昇法 (gradient ascent, GA), 黄金分割探索 (golden section search, GSS), および 2 次曲面当てはめ (quadratic curve fitting) を用いた。実験の結果から、提案法, GA, GSS は、2 次曲面当てはめにに基づく手法と比較してシフト量推定精度の点から優れていることが示される。また、提案法は、GA および GSS と比べ、1 反復あたりそれぞれ約 6.8 倍と 4 倍高速であり、非反復的な 2 次曲面当てはめと同等の速度で推定できる。

2 問題設定

本論文では、画像に代表される 2 次元離散信号 x, y のアライメントに着目する。画素 $\mathbf{p} = (p_1, p_2)^\top$ における x, y の画素値を、それぞれ $x[\mathbf{p}], y[\mathbf{p}]$ と表す。ここで、 \cdot^\top は、ベクトルあるいは行列の転置を表す。また、 x と y の $N \times M$ 2 次元離散フーリエ変換を、それぞれ \hat{x} および \hat{y} とする。画像 \hat{x} および \hat{y} は、厳密に帯域制限されていると仮定する。すなわち、角周波数ベクトルを $\boldsymbol{\omega}$ として、 $\boldsymbol{\omega}$ の少なくとも 1 つの要素が π と等しいとき、 $\hat{x}(\boldsymbol{\omega}) = \hat{y}(\boldsymbol{\omega}) = 0$ とする。2 次元クロススペクトル $\hat{\Phi}_2^{(xy)}(\boldsymbol{\omega}_{kl}) = \hat{x}^*(\boldsymbol{\omega}_{kl})\hat{y}(\boldsymbol{\omega}_{kl})$ を用いると、 x, y の 2 次元相互相関関数は

$$\check{\Phi}_2^{(xy)}[\mathbf{p}] = \frac{1}{NM} \sum_{k \in K} \sum_{l \in L} \hat{\Phi}_2^{(xy)}(\boldsymbol{\omega}_{kl}) \exp(j\boldsymbol{\omega}_{kl}^\top \mathbf{p}) \quad (1)$$

と表される。ここで、 j は虚数単位であり、 $\boldsymbol{\omega}_{kl} = (\omega_k, \omega_l)^\top = (\frac{2\pi k}{N}, \frac{2\pi l}{M})^\top$ である。総和を取る範囲 K および L はそれぞれ、 $K = \{-N/2+1, -N/2+2, \dots, N/2\}$ および $L = \{-M/2+1, -M/2+2, \dots, M/2\}$ である。

テンプレートマッチングなどの応用において、相互相関関数のピークを鋭くする目的で、式 (1) における各項を重み付けすることがある。この理由から、本論文では、次

式で与えられる一般化 2 次元相互相関関数を考える。

$$\check{\Phi}_2^{(xy)}[\mathbf{p}] = \frac{1}{NM} \sum_{k \in K} \sum_{l \in L} w_{kl} \hat{\Phi}_2^{(xy)}(\boldsymbol{\omega}_{kl}) \exp(j\boldsymbol{\omega}_{kl}^\top \mathbf{p}) \quad (2)$$

ここで、 $w_{kl} \in \mathbb{R}^+$ は任意の重みである。もし、重み w_{kl} を 1 とすると、式 (2) は式 (1) で与えられる通常の相互相関関数と一致する。また、重みを $w_{kl} = |\hat{\Phi}_2^{(xy)}(\boldsymbol{\omega}_{kl})|^{-1}$ とした場合には、式 (2) は位相限定相関 [18] (音響信号処理分野における GCC-PHAT [16]) と一致する。

通常式 (2) は、整数を要素とする \mathbf{p} について計算される離散の関数である。一方、 \mathbf{p} が実ベクトルである場合には、 $\check{\Phi}_2^{(xy)}$ は連続関数と考えられる。本論文の目的は、連続の一般化 2 次元相互相関関数を最大化する実ベクトル $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ を推定すること、すなわち、以下の最適化問題

$$\tilde{\mathbf{p}} = \arg \max_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2} \check{\Phi}_2^{(xy)}(\mathbf{p}) \quad (3)$$

を解くことである。

3 補助関数法に基づく 2 次元相互相関関数の最大化

1 次元信号に対しては、山岡らによってその一般化相互相関関数を補助関数法に基づき最大化するアルゴリズムが既に提案されている [19]。本論文では、山岡らのアルゴリズムを基にして、2 次元相互相関関数を最大化するアルゴリズムを導く。

3.1 補助関数法

補助関数法は、目的関数を直接最大化する代わりに、その下限となる、より最大化が容易な補助関数を用意し、補助関数の最大化と補助変数の更新を反復することで、間接的に目的関数を最大化するアルゴリズムである [20]–[22]。

式 (3) に示す最適化問題に補助関数法を適用するためには、以下の条件を満たす補助関数 $Q(\mathbf{p}, \boldsymbol{\theta})$ の設計が必要である。

- 任意の 2 次元ベクトル \mathbf{p} および $\boldsymbol{\theta}$ について、不等式 $\check{\Phi}_2^{(xy)}(\mathbf{p}) \geq Q(\mathbf{p}, \boldsymbol{\theta})$ が成り立つ。
- 任意の \mathbf{p} について、 $\check{\Phi}_2^{(xy)}(\mathbf{p}) = Q(\mathbf{p}, \boldsymbol{\theta})$ を満たす $\boldsymbol{\theta} = f(\mathbf{p})$, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が存在する。

このとき、 $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^2$ は、補助変数と呼ばれる。これら条件を満たす $Q(\mathbf{p}, \boldsymbol{\theta})$ と、初期値 $\tilde{\mathbf{p}}^{(0)}$ が与えられたとき、次の更新式を繰り返し計算することで、点列 $\{\mathbf{p}^{(i)}\}$ が局所最適解に収束することを保証できる。

$$\boldsymbol{\theta}^{(i)} = f(\mathbf{p}^{(i)}), \mathbf{p}^{(i+1)} = \arg \max_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2} Q(\mathbf{p}, \boldsymbol{\theta}^{(i)}) \quad (4)$$

ただし、 i は反復回数を表すインデックスである。

3.2 2次元相互相関のための補助関数の導出

$\hat{\Phi}_2^{(xy)}$ の共役対称性から， $\check{\Phi}_2^{(xy)}$ を余弦関数の和として次式の通り表すことができる。

$$\check{\Phi}_2^{(xy)}[\mathbf{p}] = \frac{1}{NM} \sum_{k \in K^+} \sum_{l \in L} \alpha_{kl} \cos(\boldsymbol{\omega}_{kl}^\top \mathbf{p} + \varphi_{kl}) \quad (5)$$

ここで， $K^+ = \{0, 1, \dots, N/2\}$ であり，

$$\alpha_{kl} = w_{kl} \beta_{kl} \left| \hat{\Phi}_2^{(xy)}(\boldsymbol{\omega}_{kl}) \right|, \quad (6)$$

$$\beta_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{if } k = 0 \text{ and } l < 0 \\ 1 & \text{if } k \in \{0, N/2\} \text{ and } l \in \{0, M/2\}, \\ 2 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

$$\varphi_{kl} = \angle \hat{\Phi}_2^{(xy)}(\boldsymbol{\omega}_{kl}) \quad (8)$$

である。

文献 [19] の Proposition 1 より，任意の実数 θ について以下の不等式が成り立つ。

$$\cos \theta \geq -\frac{1}{2} \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} \theta^2 + \left(\cos \theta_0 + \frac{1}{2} \theta_0 \sin \theta_0 \right) \quad (9)$$

ただし， $|\theta_0| \leq \pi$ である。等号成立は， $\theta_0 < \pi$ のとき $|\theta| = |\theta_0|$ または $\theta_0 = \pi$ のとき $\theta = (2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}$ が成り立つとき，かつ，そのときに限る。

式 (9) と $\cos \theta$ の周期性から，

$$\begin{aligned} & \alpha_{kl} \cos(\boldsymbol{\omega}_{kl}^\top \mathbf{p} + \varphi_{kl}) \\ & \geq -\frac{\alpha_{kl} \sin \theta_{kl}}{2} (\boldsymbol{\omega}_{kl}^\top \mathbf{p} + \varphi_{kl} + 2n_{kl}\pi)^2 + C \end{aligned} \quad (10)$$

を得る。ここで， $n_{kl} \in \mathbb{Z}$ は $|\boldsymbol{\omega}_{kl}^\top \mathbf{p} + \varphi_{kl} + 2n_{kl}\pi| \leq \pi$ を満たす。また， C は \mathbf{p} を含まない定数項を指す。等号成立は，

$$\theta_{kl} = \boldsymbol{\omega}_{kl}^\top \mathbf{p} + \varphi_{kl} + 2n_{kl}\pi \quad (11)$$

のときに限る。

式 (10) を式 (5) の各項に適用することによって，目的関数式 (5) に対する補助関数 $Q(\mathbf{p}, \boldsymbol{\theta})$ が，

$$\begin{aligned} \check{\Phi}_2^{(xy)}[\mathbf{p}] & \geq Q(\mathbf{p}, \boldsymbol{\theta}) \\ & = \sum_{k \in K^+} \sum_{l \in L} -\frac{\alpha_{kl} \sin \theta_{kl}}{2NM} (\boldsymbol{\omega}_{kl}^\top \mathbf{p} + \varphi_{kl} + 2n_{kl}\pi)^2 \\ & \quad + C. \end{aligned} \quad (12)$$

として与えられる。

3.3 更新式

$Q(\mathbf{p}, \boldsymbol{\theta})$ は， \mathbf{p} に関する2次関数であることから， Q の最大点は，以下の方程式を解くことで容易に与えられる。

$$\begin{aligned} \nabla Q(\mathbf{p}, \boldsymbol{\theta}) & = \sum_{k \in K^+} \sum_{l \in L} -s_{kl} (\boldsymbol{\omega}_{kl}^\top \mathbf{p} + \varphi_{kl} + 2n_{kl}\pi) \boldsymbol{\omega}_{kl} \\ & = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (13)$$

上式において， ∇ は \mathbf{p} に関する勾配を表し， $s_{kl} = \alpha_{kl} \frac{\sin \theta_{kl}}{\theta_{kl}}$ である。よって，

$$\mathbf{A} = \sum_{k \in K^+} \sum_{l \in L} s_{kl} \boldsymbol{\omega}_{kl} \boldsymbol{\omega}_{kl}^\top, \quad (14)$$

$$\mathbf{b} = \sum_{k \in K^+} \sum_{l \in L} s_{kl} (-\varphi_{kl} - 2n_{kl}\pi) \boldsymbol{\omega}_{kl} \quad (15)$$

とすると， $\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{b}$ が成り立つ。式 (11) の等号成立条件から， $-\varphi_{kl} - 2n_{kl}\pi = \boldsymbol{\omega}_{kl}^\top \mathbf{p} - \theta_{kl}$ を代入することにより，次の更新式を得る。

$$n_{kl}^{(i)} \leftarrow \arg \min_{n \in \mathbb{Z}} \left| \boldsymbol{\omega}_{kl}^\top \mathbf{p}^{(i)} + \varphi_{kl} + 2n\pi \right|, \quad (16)$$

$$\theta_{kl}^{(i)} \leftarrow \boldsymbol{\omega}_{kl}^\top \mathbf{p}^{(i)} + \varphi_{kl} + 2n_{kl}^{(i)} \pi, \quad (17)$$

$$\mathbf{p}^{(i+1)} \leftarrow \left(\mathbf{A}^{(i)} \right)^{-1} \mathbf{b}^{(i)} = \mathbf{p}^{(i)} - \left(\mathbf{A}^{(i)} \right)^{-1} \mathbf{v}^{(i)} \quad (18)$$

ここで，

$$s_{kl}^{(i)} = \alpha_{kl} \frac{\sin \theta_{kl}^{(i)}}{\theta_{kl}^{(i)}}, \quad (19)$$

$$\mathbf{A}^{(i)} = \sum_{k \in K^+} \sum_{l \in L} s_{kl}^{(i)} \boldsymbol{\omega}_{kl} \boldsymbol{\omega}_{kl}^\top, \quad (20)$$

$$\mathbf{v}^{(i)} = \sum_{k \in K^+} \sum_{l \in L} s_{kl}^{(i)} \theta_{kl}^{(i)} \boldsymbol{\omega}_{kl} \quad (21)$$

である。

4 実験

推定精度と計算コストの観点から提案法の性能を評価するため，シミュレーション実験を実施した。

4.1 実験条件

本実験では，*airplane*, *barbara*, *cameraman*, *mandrill* に代表される 20 枚の標準画像¹を用い，位置ずれのある画像の組を生成した。生成した画像の組の例を図 1 に示す。原画像の大きさは， 256×256 画素である。位置ずれのある画像を生成するために，原画像を縦横方向にシフトした。シフト量 \mathbf{p}^* は， $[-10, 10] \times [-10, 10]$ 上の一様

¹<https://sipi.usc.edu/database/> および http://www.ess.ic.kanagawa-it.ac.jp/app_images_j.html からダウンロードできる。



(a) Original (b) Shifted

図 1: 位置ずれのある画像の組の例 (*Pepper*)

分布に従う乱数により定めた。非整数のシフトを行う際の補間手法には、双3次補間を用いた。原画像とそれをシフトした画像の間に生じる、他方の画素値が存在しない領域は切り取った。最後に、平均0、標準偏差0.1のガウス雑音を、原画像とシフト画像のそれぞれに独立に加えた。

提案する補助関数に基づく手法 (Aux. と略記) を、勾配上昇法 (gradient ascent, GA), 2次元黄金分割探索 (golden section search, GSS) [23], および、文献 [5] における2次元曲面当てはめの3つの手法と比較した。GAは、最大点 $\tilde{\mathbf{p}}$ を $\tilde{\mathbf{p}}^{(i+1)} = \tilde{\mathbf{p}}^{(i)} + \eta \nabla \check{\Phi}_2^{(xy)}(\tilde{\mathbf{p}}^{(i)})$ に従い反復的に更新する手法であり、ステップ幅 η は Armijo 条件 [24] に従うバックトラック直線探索によって決定した。GSSは、単峰性を持つ目的関数を対象に、その勾配を用いずに最大点を探索する反復アルゴリズムである。 $\check{\Phi}_2^{(xy)}$ は多峰性の関数であるが、最大点の近傍では単峰性を持つと考えられるため、良い初期推定値 $\mathbf{p}^{(0)}$ が与えられる場合には有効である。GA, GSS, および提案法においては、目的関数 (式 (2) 参照) における重みを $w_{kl} = 1$ とし、初期推定値 $\mathbf{p}^{(0)}$ は離散の相互相関 $\check{\Phi}_2^{(xy)}[\mathbf{p}]$ の最大点として、50回の反復更新を行った。

曲面当てはめは、離散の目的関数に2次元曲面を当てはめてその最大点を求めることで、もともとの目的関数の近似解を求める方法である。文献 [5] における曲面当てはめによる位置ずれ推定では、相互相関関数ではなく l_2 距離を目的関数としていたが、本実験では他の手法に合わせ重みを $w_{kl} = 1$ とする離散の相互相関 $\check{\Phi}_2^{(xy)}[\mathbf{p}]$ を目的関数とした。

これら手法は、すべて Python および PyTorch を用いて実装した。各手法により得られる推定値 $\tilde{\mathbf{p}}$ と真のシフト量 \mathbf{p}^* 間の推定誤差は、二乗平均平方根誤差 (root-mean-square error, RMSE) により評価した。

本実験は、動作周波数 3.8 GHz の CPU および 64GB メモリを有するコンピュータ上で、GPU による演算なしに実施した。(表 1 参照)。実行時間の測定にあたっては、

表 1: 実行時間計測に用いたコンピュータのスペック

Processor	AMD Ryzen 7 5800X (3.8 GHz, 8 cores)
Memory	64 GB
OS	Ubuntu 20.04 LTS
Language	Python 3.9.11
Library	PyTorch 2.0.1

表 2: 真のシフト量とその推定値の間の RMSE

Image	GA	GSS [23]	Curve fitting [5]	Aux. (ours)
Airplane	0.0158	0.0158	0.0489	0.0158
Barbara	0.0453	0.0453	0.1900	0.0453
Cameraman	0.0139	0.0140	0.0157	0.0140
Pepper	0.1489	0.1489	0.2241	0.1489
Woman	0.0448	0.0454	0.0820	0.0454
Average (20 images)	0.0679	0.0679	0.1202	0.0680
Std. (20 images)	0.0391	0.0391	0.0612	0.0391

Python 標準ライブラリに含まれる `time.perf_counter()` 関数を用いた。

4.2 実験結果

表 2 に、評価データ内の 5 組のデータに対する真のシフト量とその推定値の RMSE と、その全評価データに対する平均および標準偏差を示す。この結果から、GA, GSS, および提案法は、曲面当てはめと比較して高い精度でシフト量を推定可能であることがわかる。

それぞれの手法の更新ごとの目的関数値の推移を図 2 に示す。ここで、入力画像の組は図 1 に示した *Pepper* である。図より、GA, GSS の目的関数値は、6 回の反復で局所最大値におおよそ収束しているのに対し、提案法は 8 回の反復で局所最大値に収束している。各手法の更新ごとに得られる点 $\mathbf{p}^{(i)}$ の軌跡を、図 3 から 5 にそれぞれ示す。ここで、2次元相互相関関数 $\check{\Phi}_2^{(xy)}(\mathbf{p})$ の最大点と真のシフト量 \mathbf{p}^* は、画像の切り取り等の影響でわずかに異なることに注意されたい。

20 組のデータに対する 4 つの手法の平均実行時間を表 3 に示す。反復法 (GA, GSS, および Aux.) に対しては、50 回の反復にかかる経過時間を測定し、各反復ごとの実行時間を計算した。表より、提案法は GA よりも約 6.8 倍、GSS よりも約 4 倍高速であり、提案法が約 8 回の反復で収束する場合 (図 2 参照)、反復を行わない曲面当てはめと同等の実行時間であることがわかる。

5 おわりに

本論文では、補助関数法を用いた 1 次元相互相関最大化アルゴリズムを基に、一般化 2 次元相互相関関数の最大化アルゴリズムを導出した。提案法は、2 次元相互相関

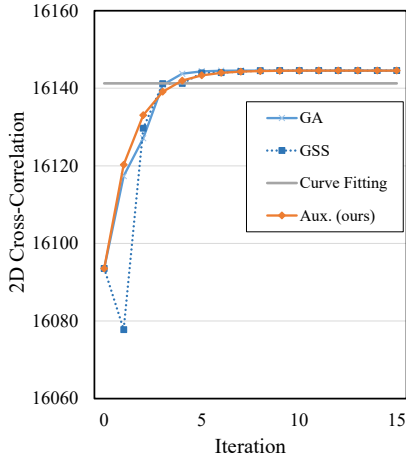


図 2: *Pepper* に対する更新毎の目的関数の推移. 曲面当てはめは反復を行わないため，目的関数値を直線で示している.

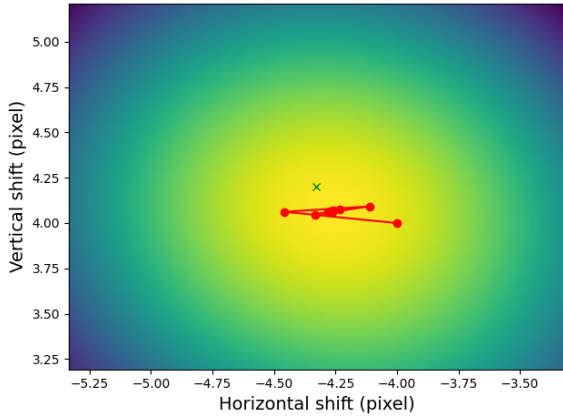


図 3: *Pepper* に対する推定値の軌跡 (GA). , ここで，赤い点は推定値 $p^{(i)}$ を表し，十字は真のシフト量 p^* を表す.

表 3: 反復法における更新毎の実行時間 (ms)

Statistic	GA	GSS [23]	Curve fitting [5]	Aux. (ours)
Average	4.793	2.801	4.428	0.705
Std.	1.103	0.097	0.144	0.017

関数の最大点を，下界となる 2 次補助関数を反復的に最大化することで求める．実験結果から，提案法が 2 次曲面当てはめよりも正確に画像間のシフト量を推定できることが示された．さらに，提案法は，勾配上昇法や黄金分割探索よりも高速であり，反復を必要としない曲面当てはめと同等の実行時間であることが確かめられた．

参考文献

[1] M. Brown and D. G. Lowe, “Automatic Panoramic Image Stitching using Invariant Features,” *Int. J.*

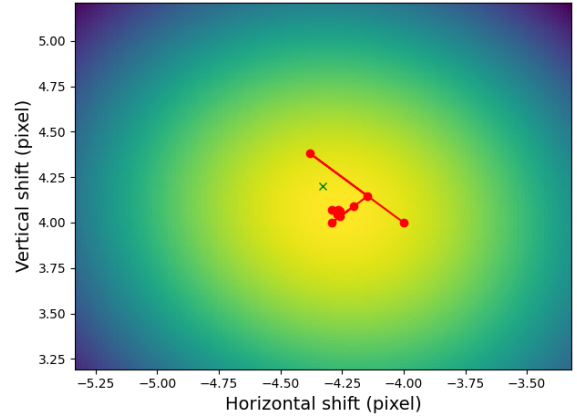


図 4: *Pepper* に対する推定値の軌跡 (GSS). , ここで，赤い点は推定値 $p^{(i)}$ を表し，十字は真のシフト量 p^* を表す.

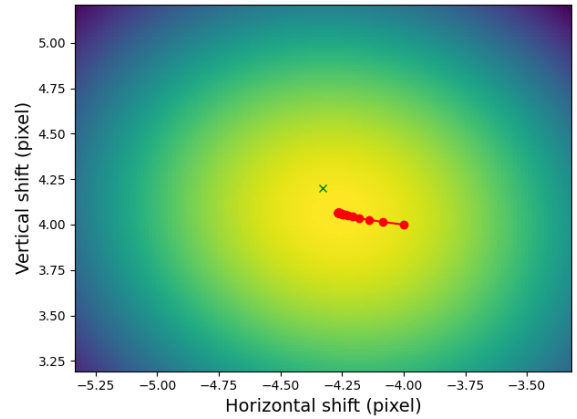


図 5: *Pepper* に対する推定値の軌跡 (Aux.). , ここで，赤い点は推定値 $p^{(i)}$ を表し，十字は真のシフト量 p^* を表す.

Comput. Vision., vol. 74, no. 1, pp. 59–73, Aug. 2007.

[2] G. Haskins, U. Kruger, and P. Yan, “Deep Learning in Medical Image Registration: A Survey,” *Machine Vision and Applications*, vol. 31, no. 1-2, p. 8, Feb. 2020.

[3] N. Snavely, S. M. Seitz, and R. Szeliski, “Modeling the World from Internet Photo Collections,” *Int J Comput Vis*, vol. 80, no. 2, pp. 189–210, Nov. 2008.

[4] P. Sen, N. K. Kalantari, M. Yaesoubi, S. Darabi, D. B. Goldman, and E. Shechtman, “Robust Patch-Based HDR Reconstruction of Dynamic Scenes,” *ACM Trans. Graph.*, vol. 31, no. 6, 203:1–203:11, Nov. 2012.

[5] S. W. Hasinoff, D. Sharlet, R. Geiss, *et al.*, “Burst Photography for High Dynamic Range and Low-

- Light Imaging on Mobile Cameras,” *ACM Trans. Graph.*, vol. 35, no. 6, pp. 1–12, Nov. 2016.
- [6] D. G. Lowe, “Distinctive Image Features from Scale-Invariant Keypoints,” *Int. J. Comput. Vision*, vol. 60, no. 2, pp. 91–110, Nov. 2004.
- [7] H. Bay, T. Tuytelaars, and L. Van Gool, “SURF: Speeded Up Robust Features,” in *Proc. ECCV*, vol. 3951, May 2006, pp. 404–417.
- [8] P. F. Alcantarilla, A. Bartoli, and A. J. Davison, “KAZE Features,” in *Proc. ECCV*, vol. 7577, Oct. 2012, pp. 214–227.
- [9] M. A. Fischler and R. C. Bolles, “Random Sample Consensus: A Paradigm for Model Fitting with Applications to Image Analysis and Automated Cartography,” *Commun. ACM*, vol. 24, no. 6, pp. 381–395, Jun. 1981.
- [10] S.-Y. Cao, J. Hu, Z. Sheng, and H.-L. Shen, “Iterative Deep Homography Estimation,” in *Proc. IEEE/CVF CVPR*, Jun. 2022, pp. 1869–1878.
- [11] M. Hong, Y. Lu, N. Ye, C. Lin, Q. Zhao, and S. Liu, “Unsupervised Homography Estimation with Coplanarity-Aware GAN,” in *Proc. IEEE/CVF CVPR*, Jun. 2022, pp. 17 642–17 651.
- [12] B. D. Lucas and T. Kanade, “An Iterative Image Registration Technique with an Application to Stereo Vision,” in *Proc. DARPA Image Underst. Workshop*, Apr. 1981, pp. 121–130.
- [13] A. Dosovitskiy, P. Fischer, E. Ilg, *et al.*, “FlowNet: Learning Optical Flow with Convolutional Networks,” in *Proc. IEEE ICCV*, Dec. 2015, pp. 2758–2766.
- [14] E. Ilg, N. Mayer, T. Saikia, M. Keuper, A. Dosovitskiy, and T. Brox, “FlowNet 2.0: Evolution of Optical Flow Estimation With Deep Networks,” in *Proc. IEEE/CVF CVPR*, Jul. 2017, pp. 2462–2470.
- [15] H. Jung, Z. Hui, L. Luo, *et al.* “Anyflow: Arbitrary Scale Optical Flow with Implicit Neural Representation.” arXiv: 2303.16493. (Mar. 29, 2023), [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/2303.16493>.
- [16] C. Knapp and G. Carter, “The Generalized Correlation Method for Estimation of Time Delay,” *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 24, no. 4, pp. 320–327, Aug. 1976.
- [17] K. Takita, T. Higuchi, and K. Kobayashi, “High-Accuracy Subpixel Image Registration Based on Phase-Only Correlation,” *IEICE Trans. Fundam. Electron. Commun. Comput. Sci.*, vol. 86, no. 8, pp. 1925–1934, Aug. 1, 2003.
- [18] C. D. Kuglin, “The Phase Correlation Image Alignment Method,” in *Proc. Int. Conf. Cybern. Soc.*, Sep. 1975, pp. 163–165.
- [19] K. Yamaoka, R. Scheibler, N. Ono, and Y. Wakabayashi, “Sub-Sample Time Delay Estimation Via Auxiliary-Function-Based Iterative Updates,” in *Proc. IEEE WASPAA*, Oct. 2019, pp. 130–134.
- [20] Y. Sun, P. Babu, and D. P. Palomar, “Majorization-Minimization Algorithms in Signal Processing, Communications, and Machine Learning,” *IEEE Trans. on Signal Process.*, vol. 65, no. 3, pp. 794–816, Feb. 2017.
- [21] K. Lange, *MM Optimization Algorithms*. Philadelphia: SIAM, Jul. 2016.
- [22] D. R. Hunter and K. Lange, “A Tutorial on MM Algorithms,” *Am. Stat.*, vol. 58, no. 1, pp. 30–37, Feb. 2004.
- [23] C. He, Y. Zheng, and S. Ahalt, “Object Tracking Using the Gabor Wavelet Transform and the Golden Section Algorithm,” *IEEE Trans. Multimed.*, vol. 4, no. 4, pp. 528–538, Feb. 2002, ISSN: 1941-0077.
- [24] L. Armijo, “Minimization of Functions Having Lipschitz Continuous First Partial Derivatives,” *Pacific J. Math.*, vol. 16, no. 1, pp. 1–3, Jan. 1, 1966.